UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

# JIM 414 – Pentaabiran Statistik

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **DUA PULUH DUA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

Sila pastikan anda mendapat buku sifir Statistik PPPJJ.

1. (a) (i) Buktikan pernyataan ini. Jika $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ adalah pembolehubah-pembolehubah tak bersandar yang tertabur secara secaman $N(0,1)$, maka $Y = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ tertabur secara $\chi^2_{n-1}$.

(ii) Andaikan suatu sampel rawak bersaiz 16 diambil daripada suatu taburan normal dengan $\sigma^2 = 5$. Hitungkan kebarangkalian sisihan piawai sampel berada di antara 1.5 dan 2.9.

(iii) Buktikan pernyataan berikut. Jika $t_n$ mempunyai taburan $t$ dengan darjah kebebasan $n$, maka $t_n^2$ tertabur secara $F_{1,n}$.

(50 markah)

(b) Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ adalah sampel rawak daripada taburan Bernoulli($\theta$) berfungsi ketumpatan $f(x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$. Tunjukkan

$$\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)/n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

(20 markah)

(c) Andaikan $Z_1, \ldots, Z_n$ adalah sampel rawak daripada taburan $N(0,1)$. Takrifkan

$$\overline{Z}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Z_i \text{ dan } \overline{Z}_{n-k} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} Z_i .$$

Dapatkan taburan

(i) $\frac{1}{2}\left(\overline{Z}_k + \overline{Z}_{n-k}\right)$.

(ii) $k\overline{Z}_k^2 + (n-k)\overline{Z}_{n-k}^2$.

(30 markah)

2. (a) Andaikan $X_{11}, \ldots, X_{1n}$ adalah sampel rawak daripada taburan $N(a + b + c, \sigma^2)$. $X_{21}, \ldots, X_{2n}$ pula adalah sampel rawak daripada taburan $N(a + b - c, \sigma^2)$. $X_{31}, \ldots, X_{3n}$ pula adalah sampel rawak daripada taburan $N(a - b + c, \sigma^2)$. Manakala $X_{41}, \ldots, X_{4n}$ adalah sampel rawak daripada taburan $N(a - b - c, \sigma^2)$.

   (i) Dapatkan penganggar-penganggar momen bagi $a$, $b$ dan $c$.

   (ii) Tunjukkan bahawa penganggar momen bagi $\sigma^2$ tidak unik.

(50 markah)

(b) Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ adalah sampel rawak daripada taburan eksponen $(\theta)$ berfungsi ketumpatan $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$.

   (i) Dapatkan batas bawah Cramer-Rao bagi $\tau(\theta) = 1/\theta$.

   (ii) Bagaimanakah maklumat di dalam (i) dapat digunakan pada $\overline{X}$?

(20 markah)

(c) Diberikan $f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$. Tentukan sama ada $\theta$ adalah parameter lokasi ataupun parameter skala.

(30 markah)

3. (a) Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ adalah sampel rawak daripada taburan $N(\mu, \sigma^2)$ dan $Z_1, \ldots, Z_n$ adalah sampel rawak daripada taburan $N(0,1)$. Takrifkan

$$S_Z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - n\overline{Z}^2}{n-1}} \text{ dan } \overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i .$$

   (i) Tentukan sama ada $\frac{X_1 - X_2}{\sigma S_Z \sqrt{2}}$ adalah suatu kuantiti pangsian.

   (ii) Binakan selang keyakinan 95% bagi $\sigma$ jika boleh. Andaikan $n = 21$.

(iii) Bandingkan selang keyakinan (ii) dengan selang keyakinan bagi $\sigma$ yang dibina daripada kuantiti pangsian $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$ di mana

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right].$$

(50 markah)

(b) Diberikan $X_1, \ldots, X_{10}$ adalah sampel rawak daripada taburan $N(1, \theta)$. Dapatkan selang keyakinan 95% bagi $\theta$.

(20 markah)

(c) Diberikan $X$ ialah suatu cerapan tunggal daripada populasi bertaburan Beta $(\theta, 1)$. Andaikan $Y = -(\ln X)^{-1}$.

(i) Nilaikan $P(Y \leq 2\theta)$ dan $P(Y \geq \theta)$.

(ii) Binakan selang keyakinan bagi $\theta$ daripada (i).

(30 markah)

4. (a) Andaikan $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ adalah sampel rawak yang dicerap daripada populasi yang bertaburan Poisson($\theta$). Hipotesis $H_O$: $\theta = 1$ ditolak dan $H_A$: $\theta > 1$ diterima apabila $\sum_{i=1}^{4} X_i > c$.

(i) Cari nilai c supaya aras keertian ujian ini ialah 0.05.

(ii) Tentukan fungsi kuasa ujian ini.

(50 markah)

(b) $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ adalah sampel rawak daripada populasi bertaburan seragam $(0, \theta)$. Bentukkan ujian nisbah kebolehjadian saiz $\alpha$ bagi menguji $H_O$: $\theta = 1$ lawan $H_A$: $\theta > 1$.

(50 markah)

...5/-

5. (a) Berikan satu contoh taburan asimptot.

(25 markah)

(b) $X_1$, $X_2$, ... $X_n$ adalah sampel rawak daripada populasi bertaburan Poisson($\theta$), yakni $f(x; \theta) = \theta^x e^{-\theta} / x!$, $I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x)$, $\theta > 0$. Dapatkan penganggar kebolehjadian maksimum bagi $P(X_n = 0)$.

(25 markah)

(c) $X$ adalah sampel rawak bersaiz 1 daripada populasi bertaburan $N(0, \sigma^2)$. Binakan selang keyakinan 95% bagi $\sigma^2$.

(25 markah)

(d) Tuliskan $f(x; \theta)$ di dalam ungkapan famili fungsi ketumpatan eksponen. Apakah implikasinya terhadap ujian hipotesis yang melibatkan $\theta$?

(25 markah)

Rumus-Rumus

## Modul 1

### Pelajaran 1

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$

3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

4. $^{n}P_{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

5. $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

6. $N = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$

### Pelajaran 2

1. $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

2. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

3. $P(A) = P(A \mid B)\, P(B) + P(A \mid \bar{B})\, P(\bar{B})$

4. $P(B_i \mid A) = \dfrac{P(A \cap B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)\, P(B_j)}$

### Pelajaran 3

1. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$

2. $P(a < X < b) = \sum_{a<x<b} p(x)$

3. $F(t) = P(X \leq t)$



4. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

6. $F(y) = F(\infty, y)$

7. $f(x) = \dfrac{\partial F(x, \infty)}{\partial x}$

8. $f(y) = \dfrac{\partial F(\infty, y)}{\partial y}$

9. $p(x \mid y) = \dfrac{p(x, y)}{p(y)}$

10. $f(x \mid y) = \dfrac{f(x, y)}{f(y)}$

11. $p(x, y) = p(x)\, p(y)$

12. $f(x, y) = f(x)\, f(y)$

**Pelajaran 3**

1. $E[g(X, Y)] = \sum\limits_{x} \sum\limits_{y} g(x, y)\, p(x, y)$

2. $E[g(X, Y)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx\, dy$

3. $E[g_1(X, Y) + g_2(X, Y)] = E[g_1(X, Y)] + E[g_2(X, Y)]$

4. $E[h_1(X)\, h_2(Y)] = E[h_1(X)]\, E[h_2(Y)]$

5. (i) $\text{Cov}(X, Y) = E[X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$

   (ii) $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - \mu_X \mu_Y$

6. $\text{Cov}(aX, bY) = ab\, \text{Cov}(X, Y)$ - 9 -

7. $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\, \text{Cov}(X, Y)$

8. $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\,(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum \mathrm{Cov}\,(X, Y)$

9. $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}\,(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

10. $E[g(X, Y) \mid Y = y] = \sum_{x} g(x, y)\, p(x \mid y)$

11. $E[g(X, Y) \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x \mid y)\, dx$

12. $E[E[X \mid Y = y]] = E[X]$

13. $E[E[Y \mid X = x]] = E[Y]$

14. $E[E[g(X) \mid Y = y]] = E[g(X)]$

15. $E[E[g(Y) \mid X = x]] = E[g(Y)]$

16. $\mathrm{Var}\,(X \mid Y = y) = E[X^2 \mid Y = y] - (E[X \mid Y = y)^2$

17. $m(t_1, t_2) = E\left[e^{t_1 X_1 + t_2 X_2}\right]$

18. $m(t_1, t_2, \ldots, t_n) = E\left[e^{\sum_{i=1}^{n} t_i X_i}\right]$

19. $m(t_1) = \lim_{t_2 \to 0} m(t_1, t_2)$

20. $m(t_1, t_2, \ldots, t_n) = m(t_1)\, m(t_2) \ldots m(t_n)$

**Pelajaran 4**

1. (i) $p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \dfrac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!}\, p_1^{x_1}\, p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$

   (ii) $p(x_i) = \binom{n}{x_i} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n - x_i}$

   (iii) $p(x_i, x_j) = \dfrac{n!}{x_i!\, x_j!\, (n - x_i - x_j)!}\, p_i^{x_i}\, p_j^{x_j} (1 - p_i - p_j)^{n - x_i - x_j}$

   (iv) $E[X_i X_j] = n(n-1)\, p_i p_j$

   (v) $\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j) = -n p_i p_j$

2. (i) $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\},$

$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$

(ii) $f(x|y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_X^2}\left[x - \mu_X - \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)\right]^2\right\}$

$-\infty < x < \infty$

(iii) $m(t_1,t_2) = \exp\left[t_1\mu_X + t_2\mu_Y + \frac{1}{2}\left(t_1^2\sigma_X^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_X\sigma_Y + t_2^2\sigma_Y^2\right)\right]$

(iv) $E[XY] = \mu_X\mu_Y + \rho\,\sigma_X\sigma_Y$

(v) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho\,\sigma_X\sigma_Y$

**Modul 4**

**Pelajaran 1**

1. $M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

2. $E[M_k] = m_k$

3. $\mathrm{Var}(M_k) = \frac{1}{n}[m_{2k} - m_k)^2]$

4. $E[\bar{X}] = \mu$

5. $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sigma^2$

6. $S^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$