

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

**JIM 317 – Persamaan Pembezaan II**

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. Diberi persamaan pembezaan peringkat kedua

$$x^2 y'' - xy' + (1-x)y = 0, x > 0 \quad (I)$$

(a) Tunjukkan bahawa  $x = 0$  adalah titik singular sekata.

(20 markah)

(b) Bentuk penyelesaian Frobenius di sekitar titik singular  $x = 0$  ialah  $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

Tunjukkan hubungan jadi semula bagi persamaan (I) ialah

$$a_n = \frac{1}{(n+r-1)^2} a_{n-1}, n \geq 1.$$

(25 markah)

(c) Tunjukkan satu penyelesaian siri bagi (I) ialah

$$y = a_0 x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^n, x > 0.$$

(35 markah)

(d) Bincangkan bentuk penyelesaian kedua yang tak bersandar linear.

(20 markah)

2. (a) Pertimbangkan masalah nilai sempadan

$$y'' + 16y = 32x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$y(0) = A$$

$$y(\pi) = B$$

di mana A dan B adalah pemalar.

- (i) Nyatakan samada masalah tersebut linear, tak linear, homogen atau tak homogen.
- (ii) Tentukan syarat-syarat ke atas A dan B supaya masalah nilai sempadan yang diberi mempunyai satu penyelesaian, tiada sebarang penyelesaian, dan mempunyai bilangan penyelesaian yang tak terhingga.

(50 markah)

- (b) Diberi persamaan pembezaan tak linear

$$\frac{dx}{dt} = x^2(4-x^2)$$

dan syarat awal

$$x(0) = x_0, \quad -\infty < x_0 < \infty$$

- (i) Tentukan titik genting dan penyelesaian keseimbangan persamaan tersebut.
- (ii) Bincangkan perilaku jangka panjang penyelesaian di sekitar satu daripada penyelesaian keseimbangan serta nyatakan kestabilan penyelesaian keseimbangan tersebut.

(50 markah)

3. (a) Tuliskan semula persamaan pembezaan

$$5x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 2y + \lambda y = 0, \quad x > 0$$

dalam bentuk persamaan Sturm-Liouville.

(35 markah)

(b) Diberi masalah nilai sempadan Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[ x^2 \frac{dy}{dx} \right] + \frac{\lambda}{x^2} y = 0 \quad (\text{II})$$
$$y(1) = y(2) = 0$$

- (i) Terangkan maksud nilai eigen dan fungsi eigen bagi masalah nilai sempadan.
- (ii) Nyatakan *satu* sifat penting bagi masalah nilai sempadan.
- (iii) Cari nilai eigen dan fungsi eigen bagi masalah nilai sempadan (II).

(65 markah)

4. (a) (i) Apakah sistem persamaan pembezaan autonomous?  
(ii) Apakah maksud titik genting bagi sistem autonomous?  
(iii) Huraikan pengertian nod, titik pelana, lingkaran dan pusat.  
(iv) Takrifkan titik genting yang stabil.  
(v) Terangkan bagaimana teori bagi sistem autonomous yang linear dapat digunakan untuk kajian beberapa sistem automous yang tak linear.

(30 markah)

(b) Diberi sistem autonomous linear

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - 4y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + \alpha y$$

Kelaskan jenis titik keseimbangan (0, 0) jika

- (i)  $\alpha < 0$ .
- (ii)  $\alpha = 0$ .
- (iii)  $\alpha > 0$ .

(70 markah)

5. Pertimbangkan masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

(a) Terbitkan rumus Euler untuk mencari nilai hampiran  $y(x_n)$ .

(20 markah)

(b) Dapatkan rumus ralat pangkas setempat bagi kaedah Euler dengan menggunakan kembangan Taylor.

(20 markah)

(c) Jika diberi  $f(x, y) = -2y + x^3 e^{-2x}$  dan  $y(0) = 1$ , cari nilai hampiran bagi  $y(0.5)$  dengan menggunakan kaedah Euler dan saiz langkah  $\lambda = 0.1$ .

(60 markah)

[Kembangan Taylor di sekitar  $x = a$ ,

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{(x-a)}{1!} + \dots + y^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + y^{(k+1)}(a) \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}$$

di mana  $a < c < x$ ].

- ooo0ooo -