UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

JIM 315 – Pengantar Analisis

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. (a) Diberi set $A = (0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in I^{+}\right\}$, tentukan sama ada A terbuka, tertutup, padat dan terkait.

(30 markah)

(b) Jika F merupakan suatu set yang tertutup dan G merupakan suatu set yang terbuka pada $\mathbb{R}$, tunjukkan bahawa $G \setminus F$ adalah terbuka dan $F \setminus G$ adalah tertutup.

(30 markah)

(c) (i) Nyatakan teorem Heine-Borel.

(ii) Nyatakan serta buktikan teorem Bolzano-Weierstrass.

(40 markah)

2. (a) Tunjukkan fungsi Dirichlet $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

adalah tak selanjar pada setiap nombor.

(30 markah)

(b) Andaikan f selanjar pada $\mathbb{R}$. Bincangkan sama ada $\{x : |f(x)| < 1\}$ terbuka atau tertutup.

(30 markah)

(c) Dengan menggunakan takrif, tunjukkan bahawa fungsi $f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ adalah selanjar secara seragam pada $\mathbb{R}$.

(40 markah)

3. (a) Jika terbitan fungsi f adalah terbatas pada suatu selang S, tunjukkan f adalah selanjar secara seragam pada S. Seterusnya bincangkan sama ada $f(x) = \tan^{-1} x$ selanjar secara seragam pada $\mathbb{R}$.

(30 markah)

(b) Buktikan jika f terbezakan pada nombor a, maka f adalah selanjar pada a.

(30 markah)

(c) Tunjukkan bahawa

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

adalah selanjar pada 0 tetapi tak terbeza pada 0.

(40 markah)

4. (a) Dengan menggunakan takrif kamiran tunjukkan bahawa $\int_a^b c\,dx = c(b-a),\ c \in \mathbb{R}$.

(30 markah)

(b) Jika $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ selanjar pada $[a, b]$ dan $\int_a^b f = \int_a^b g$, tunjukkan bahawa wujud $c \in (a, b)$ supaya $f(c) = g(c)$.

(30 markah)

(c) Andaikan $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah terbatas dan selanjar kecuali pada $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$. Buktikan g terkamir secara Riemann pada $[a, b]$.

(40 markah)