UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

JIM 312 – Teori Kebarangkalian

Masa: [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **DUA PULUH** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan.

Jawab **SEMUA** soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

Sila pastikan anda mendapat buku sifir Statistik PPPJJ.

1. (a) Di dalam suatu kotak ada lima keping kad. Tiga daripada kad-kad tersebut ditandakan dengan huruf 'K' manakala selebihnya ditandakan dengan huruf 'B'. Dua kad dikeluarkan daripada kotak tersebut berturut-turut tanpa pengembalian.

   (i) Bentukkan ruang sampel ujikaji ini.
   (ii) Berdasarkan (i) berapakah kebarangkalian berlakunya kad pertama dikeluarkan bertanda 'K' dan kad kedua pula bertanda 'B'?
   (iii) Huraikan penyelesaian (ii) dengan menggunakan rumus Bayes.

(50 markah)

   (b) Terdapat 30 orang pelajar di dalam kelas JIM 312. Berapakah kebarangkalian sekurang-kurangnya dua orang pelajar mempunyai hari lahir yang sama?

(20 markah)

   (c) Tiga puluh lima peratus daripada jurutera yang bekerja di Syarikat ABC mempunyai ijazah sarjana di dalam bidang kejuruteraan elektrik (MSEE). Daripada kumpulan ini 80% turut menyelia projek khas. Daripada kalangan jurutera yang tidak berkelulusan MSEE pula 10% menyelia projek khas. Katakan seorang jurutera yang menyelia projek khas dipilih untuk dinaikkan pangkat, berapakah kebarangkalian dia juga adalah lulusan MSEE?

(30 markah)

2. (a) Suatu pembolehubah rawak X mempunyai fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x) = \begin{cases} 0.25, & 3 \le x \le 7 \\ 0, & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

   (i) Cari $P(X < 5)$.
   (ii) Dapatkan min X.
   (iii) Dapatkan varians X.

(50 markah)

   (b) Diberikan fungsi

$$h(x) = \begin{cases} 2, & 1 \le x < 3 \\ 4, & x \ge 3. \end{cases}$$

Sekiranya X tertabur secara eskponen(0.5), dapatkan fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi $Y = h(X)$.

(20 markah)

(c) Andaikan X adalah pembolehubah rawak Poisson(2). Hitungkan kebarangkalian X melebihi sekurang-kurangnya minnya.

(30 markah)

3. (a) (X, Y) mempunyai fungsi jisim kebarangkalian tercantum $p(x, y)$ yang diberikan oleh jadual berikut:

	Y			
X	2	3	4	5
0	1/24	3/24	1/24	1/24
1	1/12	1/12	3/12	1/12
2	1/12	1/24	1/12	1/24

(i) Dapatkan fungsi taburan longgokan tercantum $F(x, y)$.
(ii) Dapatkan fungsi-fungsi taburan longgokan sut daripada (i).

(50 markah)

(b) Diberikan X dan Y yang tertabur dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum berikut:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4}{225}xy, & 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 5 \\ 0, & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Nilaikan $P(0 < X < 2, 0 < Y < 4)$.

(20 markah)

(c) Pertimbangkan pembolehubah rawak X yang mempunyai min 3 dan varians 2. Pembolehubah rawak kedua Y boleh ditakrifkan dengan $Y = 3X - 11$.

(i) Sahkan korelasi di antara X dan Y adalah 0.
(ii) Justeru itu tentukan sama ada X dan Y tak bersandar.

(30 markah)

4. (a) $X_1, X_2, \ldots X_{10}$ dan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$ adalah dua sampel rawak tak bersandar, masing-masing dicerap daripada taburan Normal(0, 1) dan Normal(1, 4). Andaikan $\overline{X}$ dan $\overline{Y}$ adalah min-min sampel bagi kedua-dua sampel rawak tersebut. Dapatkan $P(\overline{X} > \overline{Y})$.

(50 markah)

(b) S_1^2 dan S_2^2, masing-masing adalah varians bagi dua sampel rawak. Yang pertama bersaiz 8 dan yang kedua bersaiz 12. Kedua-dua sampel rawak ini dicerap daripada dua taburan normal tak bersandar yang mempunyai varians yang sama. Dapatkan $P(S_1^2/S_2^2 < 4.89)$.

(20 markah)

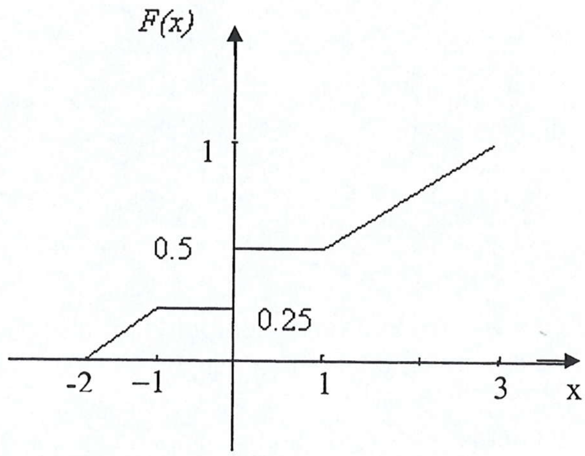
(c) Andaikan X_1, X_2 adalah sampel rawak daripada taburan $N(0,1)$. Dapatkan taburan

(i) X_1^2/X_2^2.

(ii) X_1/X_2.

(30 markah)

5. (a) Suatu pembolehubah rawak X mempunyai fungsi taburan longgokan seperti yang dilakarkan.



(i) Cari $F(2)$.

(ii) Cari $P(-1 < X \leq 1)$.

(iii) Cari $P(X \leq 0)$.

(25 markah)

(b) X tertabur secara Normal $(0, \sigma^2)$. Andaikan X ditransformasikan seperti berikut: ditambah 1, kemudian dikuasaduakan dan akhirnya ditolak X. Dapatkan jangkaan pembolehubah yang dihasilkan daripada transformasi ini.

(25 markah)

(c) Diberikan X dan Y yang tertabur dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{di tempat lain.}\end{cases}$$

Tentukan sama ada X dan Y tak bersandar.

(25 markah)

(d) Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ adalah sampel rawak daripada taburan Normal (μ, σ^2) dan $Z_1, \ldots, Z_n$ adalah sampel rawak daripada taburan Normal (0, 1). Takrifkan $S_Z=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - n\overline{Z}^2}{n-1}}$ dan $\overline{Z}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$. Dapatkan taburan pembolehubah $\dfrac{X_1-X_2}{\sigma S_Z\sqrt{2}}$ jika wujud.

(25 markah)

Rumus-Rumus

Modul 1

Pelajaran 1

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$

3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

4. $n_{P_r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

5. $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

6. $N = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$

Pelajaran 2

1. $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

2. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

3. $P(A) = P(A \mid B)\, P(B) + P(A \mid \bar{B})\, P(\bar{B})$

4. $P(B_i \mid A) = \dfrac{P(A \cap B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)\, P(B_j)}$

Pelajaran 3

1. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$

2. $P(a < X < b) = \sum\limits_{a<x<b} p(x)$

3. $F(t) = P(X \leq t)$

4. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

6. $F(y) = F(\infty, y)$

7. $f(x) = \dfrac{\partial F(x, \infty)}{\partial x}$

8. $f(y) = \dfrac{\partial F(\infty, y)}{\partial y}$

9. $p(x \mid y) = \dfrac{p(x, y)}{p(y)}$

10. $f(x \mid y) = \dfrac{f(x, y)}{f(y)}$

11. $p(x, y) = p(x)\, p(y)$

12. $f(x, y) = f(x)\, f(y)$

Pelajaran 3

1. $E[g(X, Y)] = \sum_{x} \sum_{y} g(x, y)\, p(x, y)$

2. $E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\, dx\, dy$

3. $E[g_1(X, Y) + g_2(X, Y)] = E[g_1(X, Y)] + E[g_2(X, Y)]$

4. $E[h_1(X)\, h_2(Y)] = E[h_1(X)]\, E[h_2(Y)]$

5. (i) $\text{Cov}(X, Y) = E[X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$

   (ii) $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - \mu_X \mu_Y$

6. $\text{Cov}(aX, bY) = ab\, \text{Cov}(X, Y)$

7. $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\, \text{Cov}(X, Y)$

8. $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum \mathrm{Cov}(X, Y)$

9. $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

10. $E[g(X, Y) \mid Y = y] = \sum_{x} g(x, y)\, p(x \mid y)$

11. $E[g(X, Y) \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x \mid y)\, dx$

12. $E[E[X \mid Y = y]] = E[X]$

13. $E[E[Y \mid X = x]] = E[Y]$

14. $E[E[g(X) \mid Y = y]] = E[g(X)]$

15. $E[E[g(Y) \mid X = x]] = E[g(Y)]$

16. $\mathrm{Var}(X \mid Y = y) = E[X^2 \mid Y = y] - (E[X \mid Y = y)^2$

17. $m(t_1, t_2) = E\left[e^{t_1 X_1 + t_2 X_2}\right]$

18. $m(t_1, t_2, \ldots, t_n) = E\left[e^{\sum_{i=1}^{n} t_i X_i}\right]$

19. $m(t_1) = \lim_{t_2 \to 0} m(t_1, t_2)$

20. $m(t_1, t_2, \ldots, t_n) = m(t_1)\, m(t_2) \ldots m(t_n)$

Pelajaran 4

1. (i) $p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \dfrac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!}\, p_1^{x_1}\, p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$

   (ii) $p(x_i) = \binom{n}{x_i} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n - x_i}$

   (iii) $p(x_i, x_j) = \dfrac{n!}{x_i!\, x_j!\, (n - x_i - x_j)!}\, p_i^{x_i}\, p_j^{x_j} (1 - p_i - p_j)^{n - x_i - x_j}$

   (iv) $E[X_i X_j] = n(n-1)\, p_i p_j$

   (v) $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -n p_i p_j$

2. (i) $$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\},$$

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

(ii) $$f(x|y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_X^2}\left[x - \mu_X - \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)\right]^2\right\}$$

$$-\infty < x < \infty$$

(iii) $$m(t_1,t_2) = \exp\left[t_1\mu_X + t_2\mu_Y + \frac{1}{2}\left(t_1^2\sigma_X^2 + 2\rho t_1 t_2\sigma_X\sigma_Y + t_2^2\sigma_Y^2\right)\right]$$

(iv) $E[XY] = \mu_X\mu_Y + \rho\,\sigma_X\sigma_Y$

(v) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho\,\sigma_X\sigma_Y$

Modul 4

Pelajaran 1

1. $M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

2. $E[M_k] = m_k$

3. $\mathrm{Var}(M_k) = \frac{1}{n}\,[m_{2k} - m_k)^2]$

4. $E[\bar{X}] = \mu$

5. $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sigma^2$

6. $S^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$