UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

JIM 213 – Persamaan Pembezaan I

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. (a) Selesaikan persamaan pembezaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy^3}.$$

(30 markah)

(b) Pertimbangkan persamaan pembezaan

$$(y^2 + 2xy)\,dx - x^2\,dy = 0.$$

(i) Tunjukkan persamaan pembezaan tersebut ***tidak*** tepat.

(ii) Dengan mendarabkan persamaan tersebut dengan fungsi y^{-2}, tunjukkan ia adalah tepat.

(iii) Gunakan penyelesaian bagi persamaan tepat dalam (ii) untuk menyelesaikan persamaan pembezaan asal.

(iv) Nyatakan jika ada sebarang penyelesaian yang "tercicir" dalam proses (iii).

(70 markah)

2. (a) Dengan menggunakan kaedah koefisien belum tentu, berikan bentuk penyelesaian khusus bagi persamaan berikut (penyelesaian lengkap tidak diperlukan).

(i) $$\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x - 7 + \cos x$$

(ii) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = xe^{2x}$$

(35 markah)

(b) Selesaikan persamaan Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2y^2.$$

(30 markah)

(c) Cari penyelesaian bagi persamaan pembezaan linear

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{3}{x} - 1\right)y = -\frac{2}{x}, \; x \neq 0$$

tertakluk kepada syarat awal $y(1) = 10$.

(35 markah)

3. (a) Cari penyelesaian am bagi persamaan linear peringkat kedua

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (a+b)\frac{dy}{dx} + aby = 0$$

jika a dan b adalah nombor nyata yang berbeza.

(35 markah)

(b) Pertimbangkan persamaan pembezaan homogen

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (x+1)\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

(i) Tunjukkan bahawa

$y_1 = e^x$ dan $y_2 = x + 1$

membentuk set penyelesaian asasi bagi persamaan pembezaan homogen tersebut.

(ii) Dengan menggunakan kaedah variasi parameter, cari penyelesaian am bagi persamaan pembezaan tak homogen

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (x+1)\frac{dy}{dx} + y = x^2.$$

(65 markah)

4. (a) Jelmaan Laplace fungsi f(t) ditakrifkan oleh

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Jika fungsi

$$f(t) = \begin{cases} \sin 2t\,, & 0 \le t < \pi \\ 0\,, & t \ge \pi. \end{cases}$$

Cari jelmaan Laplace fungsi f(t).

(25 markah)

(b) Jika $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ dan $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$, maka teorem konvolusi memberi

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{1}\{F(s).G(s)\} &= f \bullet g \\ &= \int_0^t f(u)g(t-u)\, du. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan teorem konvolusi cari

$$\mathscr{L}^{1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}.$$

(30 markah)

(c) (i) Tuliskan fungsi g(t) yang ditakrifkan oleh

$$g(t) = \begin{cases} 4t\,, & 0 \le t < 1 \\ 4\,, & t \ge 1 \end{cases}$$

dalam sebutan fungsi unit Heaviside H(t-1).

(ii) Dengan menggunakan kaedah jelmaan Laplace, selesaikan masalah nilai awal

$$y''(t) + 4y(t) = g(t)$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

di mana fungsi g(t) ditakrifkan dalam c(i).

(45 markah)

[Petunjuk: Untuk soalan 4, anda boleh guna sebarang keputusan dalam Jadual 1.]

Jadual 1

	$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	$t^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^n + 1}$
3	e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
4	$\cos wt$	$\frac{s}{s^2 + w^2}$
5	$\sin wt$	$\frac{w}{s^2 + w^2}$
6	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
7	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = H(t - a)\, f(t - a)$$

- oooOooo -