

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Mac 2005

JIM 101 - Kalkulus

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. (a) Selesaikan ketaksamaan berikut:

$$\frac{x^2 + 2}{x + 2} \leq 1.$$

(30 markah)

- (b) Diberi nombor kompleks

$$z_1 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{dan} \quad z_2 = \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$$

Tentukan $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$.

(30 markah)

(c) Jika $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

(i) tunjukkan $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x-2}$

(ii) dapatkan $(f \circ f^{-1})(x)$.

(40 markah)

2. (a) Dengan menggunakan Pembezaan Prinsip Pertama, tunjukkan bahawa $f'(x) = 6x$ jika $f(x) = 3x^2 - 1$.

(30 markah)

- (b) Dengan menggunakan petua L'Hôpital, cari had berikut:

$$\text{had}_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

(30 markah)

- (c) Diberi $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$, dapatkan

(i) $\text{had}_{x \rightarrow 1} f(x)$

(ii) $\text{had}_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

(iii) $\text{had}_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

- (iv) Bincangkan keselanjaran $f(x)$ dalam selang $[-2, 2]$.

(40 markah)

3. (a) Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ bagi persamaan berikut:

(i) $y = -\frac{2}{x} \cos(x+3)$ (ii) $y^2 = x^2 + \sin xy.$

(40 markah)

(b) Selesaikan kamiran berikut:

(i) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos \theta d\theta$

(iii) $\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}.$

(60 markah)

4. (a) Tunjukkan bahawa persamaan berparameter $x(t) = 5 \sin t$, $y(t) = 4 \cos t$ adalah suatu elips berpusat di titik $(0, 0)$ dan tentukan titik-titik fokusnya.

(40 markah)

(b) Panjang lengkok L bagi persamaan berparameter diberikan oleh

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left[\frac{dx}{d\theta}\right]^2 + \left[\frac{dy}{d\theta}\right]^2} d\theta.$$

Jika suatu lengkung diberi dalam koordinat kutub dengan $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, di mana $r = f(\theta)$ dengan $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, tunjukkan bahawa panjang lengkok L ialah

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta.$$

Seterusnya, cari panjang lengkok bagi $r = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ untuk $0 \leq \theta \leq \pi$.

(60 markah)