

SULIT

---



First Semester Examination  
2022/2023 Academic Session

February 2023

**EEE232 – Complex Analysis**  
**(Analisis Kompleks)**

Duration : 3 hours  
(Masa : 3 jam)

---

Please check that this examination paper consists of **TEN (10)** pages of printed material including appendix before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **SEPULUH (10)** muka surat yang bercetak termasuk lampiran sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions** : This paper consists of **FIVE (5)** questions. Answer **all** questions.

**Arahan** : Kertas ini mengandungi **LIMA (5)** soalan. Jawab **semua** soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai.]*

...2/-

SULIT

-2-

1. a) Find the values of  $x$  and  $y$  in the equations:

*Cari nilai  $x$  dan  $y$  dalam persamaan:*

$$(i) \quad (x + yj)(3 + 4j) = 3 - 4j$$

$$(ii) \quad x(1 + j)^2 + y(2 - j)^2 = 3 + 10j$$

(25 marks/ markah)

- b) The complex conjugate of  $z$  is denoted by  $\bar{z}$ . Solve the equation, and give the answer in the form  $x + yj$ ,

*Konjugat kompleks bagi  $z$  dilambangkan dengan  $\bar{z}$ . Selesaikan persamaan, dan berikan jawapan dalam bentuk  $x + yj$ ,*

$$2z - 3\bar{z} = \frac{-27 + 23j}{1 + j}$$

(25 marks/ markah)

- c) The following quadratic equation has a solution  $z = -j$ . Find the other solution.

*Persamaan kuadratik berikut mempunyai penyelesaian  $z = -j$ . Cari penyelesaian lain.*

$$z^2 - 2z + 1 - 2j = 0$$

(25 marks/ markah)

- d) Prove that

*Buktikan itu*

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta$$

(25 marks/ markah)

...3/-

2. a) Investigate the following function whether it is differentiable or not by using Cauchy Riemann equation. Then, identify its derivative if  $f(z)$  is differentiable. State your conclusion according to limit theory.

*Siasat fungsi berikut samada ia boleh dibezakan atau tidak dengan menggunakan persamaan Cauchy-Riemann. Seterusnya, kenalpasti terbitanya jika  $f(z)$  terbezakan. Nyatakan kesimpulan anda berdasarkan teori limit.*

$$f(z) = 8(x - y)j + (x^2 - 2y)^2$$

(20 marks/ markah)

- b) Below is a complex function which is denoted as

*Di bawah ialah satu fungsi kompleks yang diberikan sebagai*

$$w = f(z)$$

where  $z = x + yj$  and  $w$  is a function of  $z$ .

*di mana  $z = x + yj$  dan  $w$  adalah fungsi bagi  $z$ .*

Solve the following function in term of  $x$  and  $y$  by arranging the expressions into real and imaginary parts. Then, state the real and imaginary functions.

*Selesaikan fungsi yang berikut dalam terma  $x$  dan  $y$  dengan menyusun sebutan-sebutan kepada bahagian nyata dan khayalan. Seterusnya nyatakan fungsi nyata dan khayalan tersebut.*

$$w = 4(z)^2 + 4 + 3z^2j + 1$$

(20 marks/ markah)

- 2 (c) If  $z = x + yj$  is an arbitrary complex variable, write the complex function of  $w = f(z)$  in term of  $x$  and  $y$  by introducing function,  $U$  and function,  $V$ .

*Jika  $z = x + yj$  adalah pembolehubah kompleks, tuliskan fungsi kompleks bagi  $w = f(z)$  dalam sebutan  $x$  dan  $y$  dengan memperkenalkan fungsi  $U$  and fungsi  $V$ .*

Then, assume that  $U(x, y)$  is given as

*Seterusnya, katakan bahawa  $U(x, y)$  diberi sebagai*

$$U(x, y) = x^3 + 3x^2 - 3y^2 - 3y^2x,$$

by using Milne-Thompson method,

*dengan menggunakan kaedah Milne-Thompson,*

- (i) Calculate  $U_x$  and  $U_y$

*Kira  $U_x$  and  $U_y$*

(10 marks/ markah)

- (ii) Find  $f'(z)$  by using Cauchy-Riemann equation

*Cari  $f'(z)$  dengan menggunakan persamaan Cauchy-Riemann*

(10 marks/ markah)

- (iii) Integrate  $f'(z)$  in (ii) with respect to  $z$

*Kamirkan  $f'(z)$  dalam (ii) terhadap  $z$*

(10 marks/ markah)

- (iv) Identify the function  $V(x, y)$  from the calculation in (iii).

*Kenalpasti fungsi  $V(x, y)$  dari pengiraan dalam (iii).*

(5 marks/ markah)

- (v) Develop two Laplace equations based on your harmonic function,  $U(x, y)$  and  $V(x, y)$ . Then, state your conclusion.

*Bina dua persamaan Laplace berdasarkan fungsi harmonik  $U(x, y)$  dan  $V(x, y)$ . Seterusnya, nyatakan kesimpulan anda.*

(25 marks/ markah)

...5/-



3. Cauchy Integral Theorem states that if  $D$  is a domain and  $f(z)$  is analytic in  $D$  with  $f'(z)$  continuous, then

*Theorem Kamiran Cauchy mengatakan bahawa jika  $D$  ialah satu domain dan  $f(z)$  adalah analitik dalam  $D$  dengan  $f'(z)$  adalah berselanjat, maka*

$$\int_C f(z)dz = 0 \quad \text{Equation 3.1}$$

For any closed contour  $C$  lying entirely in  $D$  having the property that  $C$  is continuously deformable to a point.

*Untuk sebarang kontor tertutup  $C$  berada sepenuhnya dalam  $D$  yang berkeadaan bahawa  $C$  adalah secara berselanjat dibentuk kepada satu titik.*

It also shows that if  $C$  is any closed contour oriented counter clockwise and  $a$  is inside  $C$  then

*la juga menunjukkan bahawa jika  $C$  ialah sebarang kontor tertutup berorientasi secara lawan jam dan  $a$  adalah berada di dalam  $C$  maka*

$$\int_C \frac{1}{z-a} dz = 2\pi j \quad \text{Equation 3.2}$$

- a) As a data analytic engineer, you are given a task by your company to solve the mathematical equation below.

*Sebagai seorang jurutera analitik data, anda diberi tugas oleh syarikat anda bekerja untuk menyelesaikan persamaan matematik di bawah.*

$$\int_C \frac{f(z)}{z-3} dz = \int_C \frac{f(3)}{z-3} dz + \int_C \frac{f(z)-f(3)}{z-3} dz \quad \text{Equation 3.3}$$

where the integrand  $\frac{f(z)-f(3)}{z-3}$  is analytic everywhere except at  $z = 3$  and its derivative is continuous everywhere except at  $z = 3$ .

-6-

di mana bahan kamiran  $\frac{f(z)-f(3)}{z-3}$  adalah analitik di mana-mana kecuali pada  $z = 3$  dan terbitannya adalah berselanjut di mana-mana kecuali pada  $z = 3$ .

Note that from another discovery, it is proved that

Perhatikan bahawa dari penemuan yang lain, ianya dibuktikan bahawa

$$\int_C \frac{f(z) - f(3)}{z - 3} dz$$

is equal to zero.

adalah bersamaan sifar.

(i) Show that Equation (3.3) can be simplified as

Tunjukkan bahawa Persamaan (3.3) boleh dimudahkan sebagai

$$\int_C \frac{f(z)}{z - 3} dz = 2\pi j f(3)$$

(20 marks/ markah)

(ii) Do you agree that integration over  $C$  in (a)i) can be deformed to the integration over  $\acute{c}$  where  $\acute{c}$  is a circle with radius  $r$  centered at  $z = 3$ .

Adakah anda bersetuju bahawa kamiran pada  $C$  dalam (a)i) boleh dibentuk semula kepada kamiran pada  $\acute{c}$  di mana  $\acute{c}$  adalah satu bulatan berjejari  $r$  berpusat di  $z = 3$ .

(10 marks/ markah)

(iii) Explain your answer and illustrate a graphic of the domain.

Terangkan jawapan anda dan lakarkan grafik bagi kawasan.

(20 marks/ markah)

...7/-

- 3 b) Evaluate the following integral parametrically using polar form

Kirakan kamiran yang berikut secara berparameter menggunakan bentuk polar

$$\oint_c \frac{1}{z - 6 - 6j} dz = 0$$

- (i) For contour  $C$  containing the point  $z = 6 + 6j$

*Untuk kontor  $C$  yang mengandungi titik  $z = 6 + 6j$*

(30 marks/ markah)

- (ii) For contour  $C$  not containing the point  $z = 6 + 6j$

*Untuk kontor  $C$  yang tidak mengandungi titik  $z = 6 + 6j$*

(20 marks/ markah)

4. a) Establish the convergence nature of the following series using either the Ratio Test or Root Test.

*Wujudkan sifat penumpuan siri berikut menggunakan sama ada Ujian Nisbah atau Ujian Akar.*

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^n}{2^{1+4n}} \right)^n$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \right]^n$$

(20 marks/ markah)

- b) Proof that the expression below fails in the Root Test.

*Buktikan bahawa ungkapan di bawah gagal dalam Ujian Punca.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{4n} \right)^{-n}$$

(10 marks/ markah)

- c) By using the Taylors series with  $Z_0 = -3$ , expand the following function and list out the first three terms.

*Dengan menggunakan siri Taylors dengan  $Z_0 = -3$ , kembangkan fungsi berikut dan senaraikan tiga sebutan pertama.*

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

(70 marks/ markah)



5. a) Find the first 3 terms of the Taylor series for the function  $\sin x$  centered at  $a=0.5$ . Use your answer to find an approximate value to  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$ .

*Cari 3 sebutan pertama siri Taylor untuk fungsi  $\sin x$  berpusat pada  $a=0.5$ . Gunakan jawapan anda untuk mencari nilai anggaran untuk  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$ .*

(40 marks/ markah)

- b) Find the residues at all the poles of  $f(z) = \frac{3z}{(z+2)^2(z^2-1)}$ .

*Cari baki pada semua kutub  $f(z) = \frac{3z}{(z+2)^2(z^2-1)}$ .*

(60 marks/ markah)

APPENDIX

LAMPIRAN

Question	Course Outcome (CO)	Programme Outcome (PO)
1	1	PO2
2	2	PO4
3	2	PO4
4	3	PO2
5	3	PO2

-oooOooo-