UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Akhir
Sidang Akademik 2007/2008

April 2008

JIM 418/421 – Aljabar Moden

Masa: 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan bernilai 100 markah.

1. (a) Dengan menggunakan hukum algebra set, buktikan bahawa:

   (i) $B \cap (B - A)' = A \cap B$,

   (ii) $A - B = B' - A'$.

   (30 markah)

   (b) Tentukan sama ada hubungan H yang ditakrifkan atas R oleh $xHy \Leftrightarrow |x - y| \leq 3$ adalah

   (i) refleksif,
   (ii) simetri,
   (iii) transitif.

   Adakah H suatu hubungan kesetaraan?

   Cari $(2)H$.

   (40 markah)

   (c) Jika n adalah suatu integer positif dan H adalah hubungan yang ditakrifkan oleh $xHy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n}$, buktikan bahawa H adalah suatu hubungan kesetaraan atas Z.

   (30 markah)

2. (a) Katakan $(x)f = e^x$, $x \in R$ dan $(x)g = \dfrac{1}{x+3}$, $x \in R^+$, cari

   (i) fungsi gubahan fg,

   (ii) fungsi songsang $(fg)^{-1}$,

   (iii) fungsi-fungsi songsang f^{-1} dan g^{-1}.

   Seterusnya, tunjukkan bahawa $(fg)^{-1} = g^{-1} f^{-1}$.

   (40 markah)

   (b) Katakan $\langle G, * \rangle$ ialah suatu kumpulan dan $a \in G$. Buktikan bahawa $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ bagi semua integer positif n.

   (30 markah)

   (c) Buktikan bahawa jika G ialah satu kumpulan dengan ciri-ciri bahawa kuasa dua bagi setiap unsur dalam G juga identiti, maka G adalah Abelan.

   (30 markah)

3. (a) Katakan $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
dan $\beta = (1 \ \ 2 \ \ 3)(3 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 6)$.

Cari

(i) $O(\alpha)$ dan $O(\beta)$,
(ii) α^{21},
(iii) $\alpha^5\beta^{-5}$.

Adakah β suatu pilihatur genap?

(40 markah)

(b) Katakan G ialah suatu kumpulan Abelan dengan identiti e dan katakan n ialah suatu integer. Buktikan bahawa set bagi semua unsur x bagi G yang memenuhi persamaan $x^n = e$ merupakan satu subkumpulan bagi G.

(30 markah)

(c) Buktikan bahawa sebarang subkumpulan bagi suatu kumpulan kitaran adalah suatu kumpulan kitaran.

(30 markah)

4. (a) Katakan α mempunyai peringkat 15. Dapatkan semua koset kiri bagi $\langle \alpha^5 \rangle$ dalam $\langle \alpha \rangle$.

(40 markah)

(b) Katakan $H = \{e, (1 \ \ 2)\}$, tentukan sama ada H adalah normal dalam S_3.

(30 markah)

(c) Katakan ϕ adalah suatu homomorfisma daripada kumpulan $\langle G, o \rangle$ ke kumpulan $\langle H, * \rangle$ dan K = Inti ϕ = $\{x \in G \mid x\phi = f\}$ dengan f adalah identiti bagi H. Buktikan bahawa K adalah subkumpulan normal bagi G.

(30 markah)

5. (a) Katakan R^+ ialah kumpulan nombor-nombor nyata yang positif di bawah operasi pendaraban. Tunjukkan bahawa $(x)\phi = \sqrt{x}$ ialah satu automorfisma atas R^+.

(30 markah)

(b) Buktikan bahawa suatu subset S bagi suatu gelanggang $\langle R, +, \times \rangle$ adalah subgelanggang jika dan hanya jika $S \neq \phi$ dan $\forall\, a, b \in S,\ a - b \in S$ dan $a \times b \in S$.

(30 markah)

(c) Katakan C ialah set semua nombor kompleks, iaitu $C = \{a + bi \mid a, b \in R\}$, $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$ dan fungsi ϕ daripada gelanggang $\langle C, +, \times \rangle$ kepada gelanggang $\langle M, +, \times \rangle$ ditakrifkan sebagai $(a + bi)\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Buktikan ϕ ialah suatu isomorfisma gelanggang.

(40 markah)

- ooo0ooo -