

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Final Examination  
Academic Session 2007/2008

April 2008

**JIM 215 – Introduction to Numerical Analysis**  
***[Pengantar Analisis Berangka]***

Duration : 3 hours  
*[Masa: 3 jam]*

---

Please ensure that this examination paper contains NINE printed pages before you begin the examination.

Answer ALL questions. You may answer either in Bahasa Malaysia or in English.

Read the instructions carefully before answering.

Each question is worth 100 marks.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

*Jawab SEMUA soalan. Anda dibenarkan menjawab sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.*

*Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.*

*Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.]*

1. (a) Given  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 3$ . Find the exact value of  $f(3.12)$  and hence determine the error, absolute error and relative error if  $f(3.12)$  is rounded off to three decimal places. (30 marks)
- (b) Use the bisection method to find the root in the range  $[0, 1]$  for the equation  $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$  correct to 2 decimal places. (30 marks)
- (c) Show that the equation  $x^3 + x + 3 = 0$  has only one real root. Show also that this root lies between  $-2$  and  $-1$ . Using  $x = -1.2$  as initial value, find this root by Newton-Raphson method correct to 4 significant figures. (40 marks)

2. (a) Given that  $f(-2) = 46$ ,  $f(-1) = 4$ ,  $f(1) = 4$ ,  $f(3) = 156$  and  $f(4) = 484$ , use the Lagrange interpolation formula to compute  $f(0)$ . (40 marks)
- (b) Use difference table to obtain the appropriate degree of the polynomial for the data below:

$x$	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	7	12	51	196	567	1332

(30 marks)

- (c) Apply a combination of the two Simpson rules to evaluate the integral

$$\int_{3.0}^{6.5} f(x) dx \text{ based on the table below:}$$

$x$	3.0	3.5	4.0	4.5
$f(x)$	0.33906	0.13738	-0.06604	-0.23106
$x$	5.0	5.5	6.0	6.5
$f(x)$	-0.32758	-0.34144	-0.27668	-0.15384

(30 marks)

3. (a) Use Romberg integration to estimate  $\int_{-1}^3 f(x)dx$ , given the following table:

$x$	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-9	-6	-7	0	51

Give your answer in the term  $T_2\left(\frac{h_0}{4}\right)$ .

(30 marks)

- (b) Solve by Euler's method with  $h=0.02$  for  $x=0(0.02)0.10$  if

$$\frac{dy}{dx} = x + y \text{ and } y(0) = 1$$

correct to 4 decimal places.

(40 marks)

- (c) The equation  $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = 2x(y-1)$ ,  $y(0) = 0$  has the following initial values:

$x$	$y$	$f$
0	0	0
0.1	-0.01005	-0.20201
0.2	-0.04081	-0.41632
0.3	-0.09417	-0.65650
0.4	-0.17351	-0.93881

Use the Adams-Bashforth method to evaluate  $y(0.5)$ .

(30 marks)

4. (a) Use Gauss elimination method to solve the following system of equations

$$2x + 6y + 4z = 5$$

$$6x + 19y + 12z = 6$$

$$2x + 8y + 14z = 7$$

- (i) to obtain the actual solution,  
 (ii) to obtain an approximate solution with 2-digit arithmetic and partial pivoting.

Hence, determine the residue vector.

(40 marks)

(b) Use LU decomposition to solve the following set of equations.

$$\begin{aligned} 5x - y + z &= 10 \\ 2x + 4y &= 12 \\ x + y + 5z &= -1. \end{aligned}$$

(30 marks)

(c) Solve the following system of equations by the Gauss-Seidel method correct to 4 decimal places.

$$\begin{aligned} x - y + 10z &= -7 \\ 20x + 3y - 2z &= 51 \\ 2x + 8y + 4z &= 25. \end{aligned}$$

(30 marks)

5. (a) Compute the norms  $\|x\|_1$ ,  $\|x\|_2$  and  $\|x\|_\infty$  for the vector  $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -11 \end{pmatrix}$ .

(30 marks)

(b) Determine the condition number of the matrix  $A$  if  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ .

(30 marks)

(c) Apply the power method to find the dominant eigenvalue and its

corresponding eigenvector of matrix  $A$  if  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ .

(40 marks)

[APPENDIX]

**Formulae**

1.  $e = x - \bar{x}$

2.  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

3.  $P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}$

4.  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$

5.  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3}{8} h [f_0 + 3(f_1 + f_2) + 2f_3 + 3(f_4 + f_5) + \dots + 2f_{n-3} + 3(f_{n-2} + f_{n-1}) + f_n]$

6.

h	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
$h_0$	$T(h_0)$			
$h_0/2$	$T(h_0/2)$	$T_1(h_0/2)$	$T_2(h_0/4)$	
$h_0/4$	$T(h_0/4)$	$T_1(h_0/4)$	$T_2(h_0/8)$	$T_3(h_0/8)$
$h_0/8$	$T(h_0/8)$	$T_1(h_0/8)$		

7.  $y_{n+1} = y_n + h y_n'$

8.  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$

9.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = A$

$LU = A, Ly = b, Ux = y$

10.  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

11.  $k(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$

12.  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

1. (a) Diberi  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 3$ . Cari nilai tepat  $f(3.12)$  dan kemudian tentukan ralat, ralat mutlak dan ralat relatif  $f(3.12)$  yang diambil pada tiga tempat perpuluhan.

(30 markah)

- (b) Gunakan kaedah pembahagian dua sama untuk mencari punca di dalam selang  $[0, 1]$  bagi persamaan  $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$  tepat kepada 2 tempat perpuluhan.

(30 markah)

- (c) Tunjukkan bahawa persamaan  $x^3 + x + 3 = 0$  hanya mempunyai satu punca nyata. Tunjukkan juga punca ini terletak di antara  $-2$  dan  $-1$ . Dengan menggunakan  $x = -1.2$  sebagai nilai permulaan, dapatkan punca ini dengan menggunakan kaedah Newton-Raphson tepat kepada 4 angka bererti.

(40 markah)

2. (a) Diberi bahawa  $f(-2) = 46$ ,  $f(-1) = 4$ ,  $f(1) = 4$ ,  $f(3) = 156$  dan  $f(4) = 484$ , gunakan rumus interpolasi Lagrange untuk menilai  $f(0)$ .

(40 markah)

- (b) Gunakan jadual beza untuk memperolehi darjah polinomial yang sesuai untuk data berikut:

$x$	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	7	12	51	196	567	1332

(30 markah)

- (c) Gunakan gabungan kedua-dua petua Simpson untuk mencari

$$\int_{3.0}^{6.5} f(x) dx \text{ berdasarkan jadual berikut:}$$

$x$	3.0	3.5	4.0	4.5
$f(x)$	0.33906	0.13738	-0.06604	-0.23106
$x$	5.0	5.5	6.0	6.5
$f(x)$	-0.32758	-0.34144	-0.27668	-0.15384

(30 markah)

3. (a) Gunakan kaedah Romberg untuk menganggarkan  $\int_{-1}^3 (x) dx$  berdasarkan jadual berikut:

$x$	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-9	-6	-7	0	51

Berikan jawapan dalam sebutan  $T_2\left(\frac{h_0}{4}\right)$ .

(30 markah)

- (b) Selesaikan dengan menggunakan kaedah Euler dengan  $h = 0.02$  untuk  $x=0(0.02)0.10$  jika

$$\frac{dy}{dx} = x + y \text{ dan } y(0) = 1$$

tepat kepada 4 tempat perpuluhan.

(40 markah)

- (c) Persamaan  $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = 2x(y-1)$ ,  $y(0) = 0$  mempunyai nilai-nilai awal berikut:

$x$	$y$	$f$
0	0	0
0.1	-0.01005	-0.20201
0.2	-0.04081	-0.41632
0.3	-0.09417	-0.65650
0.4	-0.17351	-0.93881

Gunakan kaedah Adams-Bashforth untuk mendapatkan  $y(0.5)$ .

(30 markah)

4. (a) Dengan menggunakan kaedah penghapusan Gauss, selesaikan sistem persamaan di bawah

$$\begin{aligned} 2x + 6y + 4z &= 5 \\ 6x + 19y + 12z &= 6 \\ 2x + 8y + 14z &= 7 \end{aligned}$$

- (i) untuk memperolehi penyelesaian tepat,  
 (ii) untuk memperolehi penyelesaian hampiran dengan aritmetik 2 digit dan pemangsaan separa.

Seterusnya, dapatkan sisanya.

(40 markah)

- (b) Gunakan penghuraian  $LU$  untuk menyelesaikan sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned}5x - y + z &= 10 \\ 2x + 4y &= 12 \\ x + y + 5z &= -1.\end{aligned}$$

(30 markah)

- (c) Selesaikan sistem persamaan berikut dengan menggunakan kaedah Gauss-Seidel tepat kepada 4 tempat perpuluhan.

$$\begin{aligned}x - y + 10z &= -7 \\ 20x + 3y - 2z &= 51 \\ 2x + 8y + 4z &= 25.\end{aligned}$$

(30 markah)

5. (a) Kirakan norma-norma  $\|x\|_1$ ,  $\|x\|_2$  dan  $\|x\|_\infty$  untuk vektor  $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -11 \end{pmatrix}$ .

(30 markah)

- (b) Tentukan nombor suasana matriks  $A$  jika  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ .

(30 markah)

- (c) Gunakan kaedah kuasa untuk mencari nilai eigen yang paling dominan dan

vektor eigen yang sepadan bagi matriks  $A$  jika  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ .

(40 markah)



[APPENDIX]

**Formula**

1.  $e = x - \bar{x}$

2.  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

3.  $P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}$

4.  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$

5.  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3}{8} h [f_0 + 3(f_1 + f_2) + 2f_3 + 3(f_4 + f_5) + \dots + 2f_{n-3} + 3(f_{n-2} + f_{n-1}) + f_n]$

6.

h	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
$h_0$	$T(h_0)$			
$h_0/2$	$T(h_0/2)$	$T_1(h_0/2)$	$T_2(h_0/4)$	
$h_0/4$	$T(h_0/4)$	$T_1(h_0/4)$	$T_2(h_0/8)$	$T_3(h_0/8)$
$h_0/8$	$T(h_0/8)$	$T_1(h_0/8)$		

7.  $y_{n+1} = y_n + h y_n'$

8.  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$

9.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = A$

$LU = A, Ly = b, Ux = y$

10.  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

11.  $k(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$

12.  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

