UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Final Examination
Academic Session 2007/2008

April 2008

JIM 201 – Linear Aljabar
[*Aljabar Linear*]

Duration : 3 hours
[*Masa: 3 jam*]

Please ensure that this examination paper contains NINE printed pages before you begin the examination.

Answer ALL questions. You may answer either in Bahasa Malaysia or in English.

Read the instructions carefully before answering.

Each question is worth 100 marks.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan. Anda dibenarkan menjawab sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.]

1. (a) Let $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \, x + y = z + w \right\} \subset I\!R^4$.

Show that V is a subspace of $I\!R^4$.

(40 marks)

(b) Determine if the set

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

is a basis for V in (a).

(40 marks)

(c) Show that if A and B are similar matrices, then det (A) = det (B).

(20 marks)

2. (a) Given the following system of linear equations

$$\begin{aligned} x \qquad - 3z &= -3 \\ 2x + ay - z &= -2 \\ x + 2y + az &= 1 \end{aligned}$$

find the value of a such that this system

(i) has a unique solution
(ii) has infinite (multiple) solutions
(iii) is inconsistent.

(45 marks)

(b) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & P \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ be a singular matrix. Find P.

(35 marks)

(c) Let $S = \{v_1 \ldots, v_m\}$ and $T = \{w_1, \ldots, w_n\}$ be two bases for the vector space V with a finite dimension. Prove that $m = n$.

(20 marks)

3. (a) Compute the eigenvalues and eigenvectors of

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & -1 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Can A be diagonalized?

(60 marks)

(b) If matrix B is diagonalizable, then $B = P\ D\ P^{-1}$. Moreover, the elements on the main diagonal of D are the eigenvalues of B. Let $Q = P/3$.

(i) Show that $B = Q\ D\ Q^T$.
(ii) Are the columns of matrix Q also eigenvectors of B? Explain.

(40 marks)

4. (a) Using elementary row operations, show that

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

(30 marks)

(b) Let $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Find

(i) $|A|$ using cofactor expansion.

(ii) $Adj\,A$.

(iii) A^{-1}.

(iv) Rank of A.

(v) Solution X if $AX=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(vi) $E_1(4)E_3^1(-1)E_2^1E_3^2(-2)E_2\left(\frac{1}{2}\right)A$.

(70 marks)

5. (a) Let $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ and

$$B_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ and } B_2=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

be the ordered bases for $I\!R^3$ and $I\!R^2$ respectively.

(i) Find the linear transformation $T: I\!R^3 \to I\!R^2$ whose matrix representation with respect to B_1 and B_2 is A.

(ii) Compute $T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$ using T as determined in part (i).

(60 marks)

(b) Let $T : V \to V$ be a linear transformation with ordered bases B_1 and B_2. Let P be the transition matrix from the B_1–basis to the B_2–basis.

(i) Show that

$$[T]_{B_2} = P^{-1}[T]_{B_1} P.$$

(ii) Is P orthogonal?

(40 marks)

1. (a) Andai $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \, x + y = z + w \right\} \subset I\!R^4$.

Tunjukkan V suatu subruang $I\!R^4$.

(40 markah)

(b) Tentukan sama ada set

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

merupakan asas bagi V di dalam bahagian (a).

(40 markah)

(c) Tunjukkan jika A dan B merupakan matriks serupa, maka det (A) = det (B).

(20 markah)

2. (a) Diberi sistem persamaan linear berikut

$$\begin{aligned} x \qquad - 3z &= -3 \\ 2x + ay - z &= -2 \\ x + 2y + az &= 1 \end{aligned}$$

dapatkan nilai a supaya sistem ini

(i) mempunyai penyelesaian unik
(ii) mempunyai penyelesaian tak terhingga (berganda)
(iii) tidak konsisten.

(45 markah)

(b) Andai $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & P \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ matriks singular. Cari P.

(35 markah)

(c) Katakan $S = \{v_1 \ldots, v_m\}$ and $T = \{w_1, \ldots, w_n\}$ merupakan dua asas bagi ruang vektor V yang mempunyai dimensi terhingga. Buktikan $m = n$.

(20 markah)

3. (a) Cari nilai eigen dan vektor eigen bagi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & -1 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Adakah A terpepenjurukan?

(60 markah)

(b) Jika matriks B terpepenjuru, maka $B = P\ D\ P^{-1}$. Malahan, pemasukan pepenjurunya ialah nilai-nilai eigen bagi B. Andai $Q = P/3$.

(i) Tunjukkan $B = Q\,D\,Q^T$.
(ii) Adakah lajur-lajur dalam matriks Q juga merupakan vektor-vektor eigen bagi B? Terangkan.

(40 markah)

4. (a) Dengan menggunakan operasi baris permulaan, tunjukkan

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

(30 markah)

(b) Andai $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Dapatkan

(i) $|A|$ dengan menggunakan kembangan kofaktor.

(ii) $Adj\,A$.

(iii) A^{-1}.

(iv) Pangkat A.

(v) Penyelesaian X jika $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(vi) $E_1(4)E_3^1(-1)E_2^1E_3^2(-2)E_2\left(\frac{1}{2}\right)A$.

(70 markah)

5. (a) Andai $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ dan } B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

merupakan asas tertib bagi $I\!R^3$ dan $I\!R^2$ masing-masing.

(i) Dapatkan transformasi linear $T : I\!R^3 \to I\!R^2$ dengan matriks perwakilan terhadap B_1 dan B_2 ialah A.

(ii) Hitungkan $T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$ dengan menggunakan T yang diperolehi dalam bahagian (i).

(60 markah)

(b) Katakan $T : V \to V$ adalah transformasi linear dengan asas tertib B_1 dan B_2. Katakan P adalah matriks peralihan dari asas B_1 ke asas B_2.

(i) Tunjukkan

$$[T]_{B_2} = P^{-1}[T]_{B_1} P.$$

(ii) Adakah P berortogon?

(40 markah)

- oooOooo -