
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Akhir
Sidang Akademik 2007/2008

April 2008

JIF 315 – Kaedah Matematik

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Pilih dan jawab **LIMA** soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. (a) Dengan menggunakan **kaedah perubahan parameter**, selesaikan persamaan pembezaan yang tidak homogen berikut:

$$x^2 y'' + xy' - y = \frac{1}{x}$$

(65/100)

- (b) Selesaikan persamaan pembezaan yang berikut menggunakan **kaedah yang sesuai**:

$$(x + y)y' = x - y$$

(35/100)

2. (a) Tentukan **titik-titik biasa dan titik-titik singular** bagi persamaan berikut. Bagi setiap titik singular tentukan juga sama ada ia adalah jenis titik singular biasa atau bukan titik singular biasa:

$$x(1 - x)y'' - 3y' + 2y = 0$$

(30/100)

- (b) Dengan menggunakan **kaedah Siri Kuasa**, selesaikan persamaan pembezaan biasa berikut:

$$y'' - xy' + y = 0$$

Nyatakan empat sebutan pertama bagi penyelesaian siri untuk persamaan tersebut.

(70/100)

3. (a) Tentukan **songsangan transformasi Laplace** bagi fungsi berikut:

$$F(s) = \frac{5s^2 + 2s - 4}{2s(s^2 + s - 2)}$$

(33/100)

(b) Takrifan kamiran tetap bagi **fungsi Gamma**, $\Gamma(z)$, diberikan sebagai:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \text{Re}(z) > 0$$

Dengan menggunakan takrifan ini, nilaikan kamiran berikut:

$$I = \int_0^1 x^2 \left\{ \ln \frac{1}{x} \right\} dx$$

(33/100)

(c) Pertimbangkan persamaan pembezaan yang berikut:

$$xy'' + y' + \frac{1}{4}y = 0; \quad z = \sqrt{x} \text{ ----- (1)}$$

- (i) Tuliskan bentuk am bagi persamaan pembezaan Bessel, dan nyatakan penyelesaian amnya dalam sebutan fungsi Bessel.
- (ii) Dengan pembolehubah baru yang diberi, lakukan transformasi pembolehubah untuk menukarkan persamaan (1) kepada bentuk persamaan pembezaan Bessel.
- (iii) Nyatakan penyelesaian am bagi persamaan dalam (ii) dalam sebutan fungsi Bessel.
- (iv) Dari (iii), tuliskan pula penyelesaian am bagi persamaan pembezaan yang asal, yakni persamaan (1).

(34/100)

4. Selesaikan **persamaan Laplace 2-D** (dalam sistem koordinat Cartesian) yang berikut menggunakan kaedah pembolehubah terpisahkan, dengan syarat-syarat sempadan yang diberikan.

$$u_{xx} + u_{yy}; \quad u = u(x, y); \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 2$$

Syarat-syarat sempadan:

$$u(0, y) = 0$$

$$u(1, y) = 0$$

$$u(x, 0) = 0$$

$$u(x, 2) = f(x) = x$$

(100/100)

5. (a) Pertimbangkan fungsi vektor yang berikut:

$$\vec{f} = [\cos(y) + y \cos(x)]\hat{i} + [\sin(x) - x \sin(y)]\hat{j}$$

Tentukan **fungsi keupayaan** $\phi(x, y)$ supaya \vec{f} adalah konservatif.
yakni: $\vec{f} = \nabla \phi$.

(40/100)

- (b) Nilaikan $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ dengan:

$$\vec{f} = (x^2 - y^2) \hat{i} + (2xy) \hat{j} + 0 \hat{k};$$

$$C: \vec{r}(t) = \cos(t) \hat{i} + \sin(t) \hat{j} + 0 \hat{k} \text{ untuk } 0 \leq t \leq 2\pi \text{ (bulatan)}$$

(60/100)

6. (a) Diberi satu lengkung C yang diwakili dengan:

$$\vec{r}(t) = (1-3t)\hat{i} + (5t)\hat{j} + (2+t)\hat{k}$$

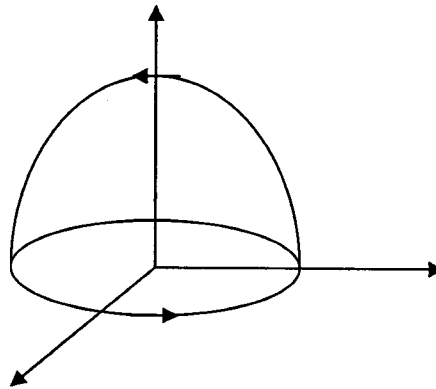
Wakikan lengkung C dengan satu fungsi vektor yang mempunyai panjang lengkung s sebagai parameter, yakni tentukan $\vec{r}(s)$. Kemudian, tentukan pula vektor tangen berunit, $\vec{T}(s)$.

(40/100)

- (b) Nilaikan $\iint_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{N} \, dA$ dengan:

$$\vec{f} = 3z\hat{i} + 4x\hat{j} + 2y\hat{k};$$

$S: z = 4 - x^2 - y^2$ (paraboloid seperti yang diberikan dalam Rajah 1)



Rajah 1

(60/100)

Lampiran

Jadual Transformasi Laplace

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
c	$\frac{c}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^k e^{-at}; k > -1$	$\frac{k!}{(s+a)^{k+1}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{at} \sin(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{at} \cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$