

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan  
Sidang Akademik 1994/95

Mei/Jun 1995

JJM 211 - Kalkulus Lanjutan

Masa: [3 jam]

---

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
  - Jawab mana-mana **LIMA** soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
  - Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
-

1. (a) Cari titik dan nilai ekstremum bagi fungsi

$$f(x,y) = 3x^2 + y^2 + y$$

pada rantau  $E = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

(30 markah)

- (b) Cari nilai yang berikut:

(i) 
$$\iint_A (x^{1/2} - y^2) dx dy$$

A adalah kawasan yang dibatasi oleh lengkung  $y = x^2$  dan  $x = y^4$ .

(ii) 
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx.$$

(40 markah)

- (c) Apakah nilai minimum bagi  $\sum_{i=1}^n x_i^2$  tertakluk kepada kekangan  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 1$  dengan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  diberi dan tidak semuanya sifar.

(30 markah)

2. (a) Pertimbangkan sistem persamaan

$$u^2 + y + 6 = v^2$$

$$uv + x^2 + 1 = 0$$

(i) Tunjukkan bahawa  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-u}{2(u^2 + v^2)}$

(ii) Cari  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

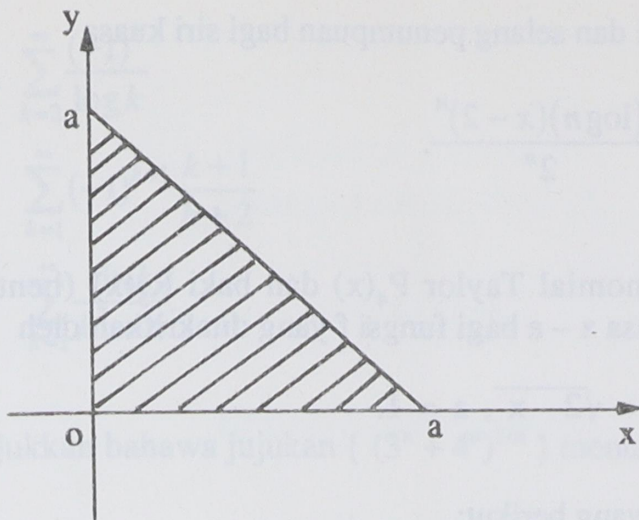
(35 markah)

- (b) Nilaikan

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dz dy dx.$$

(30 markah)

- (c) Suatu lamina yang berbentuk segitiga dua sama dan bersudut tepat mempunyai ketumpatan yang berubah mengikut kuasa dua jarak dari bucu sudut tepat. Cari jisim dan pusat jisim lamina itu.



(35 markah)

3. (a) Dengan menggunakan ujian-ujian tertentu, tentukan sama ada siri-siri berikut menumpu atau mencapah.

(i) 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7k+3}{(5k+1)3^k}$$

(ii) 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{7^k(k+1)}$$

(iii) 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[\ln(k+1)]^k}$$

(30 markah)

- (b) Cari nilai kamiran  $\iiint_A (x^2 + y^2) dx dy dz$ , jika

$$A = \{(x,y,z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq z \leq 2\}.$$

(40 markah)

- (c) Suatu syarikat mengeluarkan hasil A dan B yang dijual dengan harga RM 12 dan RM 18 setiap benda masing-masing. Jika x benda hasil A dan y benda hasil B dijual setiap hari, maka kos pengeluaran adalah  $2x^2 + xy + 2y^2$  ringgit. Penghasilan terhadap pengeluaran adalah  $0 \leq x \leq 10$  dan  $0 \leq y \leq 10$ . Apakah nilai x dan y yang patut dikeluarkan setiap hari supaya keuntungan adalah maksimum?

(30 markah)

4. (a) Cari jejari dan selang penumpuan bagi siri kuasa

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)(x-2)^n}{2^n}$$

(30 markah)

- (b) Cari polinomial Taylor  $P_4(x)$  dan baki  $R_5(x)$  (bentuk Lagrange) dalam kuasa-kuasa  $x - a$  bagi fungsi  $f$  yang ditakrifkan oleh

$$f(x) = \sqrt{2-x}, \quad a = 1.$$

(30 markah)

- (c) Buktikan yang berikut:

(i) Jujukan  $\left\{ \frac{3^n}{n} \right\}$  menokok dan tidak terbatas.

(ii) Jujukan  $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$  memenuhi kriterium Cauchy.

(iii) Jujukan  $\left\{ \frac{2n-1}{3n} \right\}$  menumpu.

(iv) Jujukan  $\{ a_n \}$  yang diberi oleh

$$a_1 = 2,$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n^2 - 2}{a_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

mencapah.

(40 markah)

5. (a) Dapatkan siri kuasa bagi  $(1+x^2)^{-1/2}$ , seterusnya tunjukkan bahawa

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

(35 markah)

- (b) Tentukan sama ada siri-siri berikut mencapah, menumpu secara mutlak atau menumpu secara bersyarat:

(i)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\log k}$

(ii)  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k+2}$

(iii)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^3 + 4}$

(30 markah)

(c) Tunjukkan bahawa jujukan  $\{ (3^n + 4^n)^{1/n} \}$  menumpu.

(35 markah)

6. (a) Tunjukkan bahawa jujukan  $\left\{ \frac{nx^n}{1 + nx^n} \right\}$  menumpu dalam selang  $[0,2]$ .

Cari  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^n}{1 + nx^n}$  dan tunjukkan penumpuan ini tidak seragam dalam selang  $[0,2]$ .

(40 markah)

(b) Nyatakan teorem Menyepit bagi jujukan. Dengan ini dapatkan had jujukan  $\left\{ \frac{\cos \pi n}{n} \right\}$ .

(30 markah)

(c) Buktikan

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$

(ii) Jika  $n$  suatu integer positif, maka

$$\sup_{x \in (-\infty, \infty)} \left| \frac{nx}{1 + n^2 x^2} \right| = \frac{1}{2}$$

(30 markah)

ooo0ooo