

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1994/95

Mei/Jun 1995

JIM 511 - Pembolehubah Kompleks

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
 - Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
 - Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
-

...2/-

1. (a) (i) Nilaiikan $\text{Log} \left[\frac{(1+i)e}{\sqrt{2}} \right]$

(ii) Selesaikan

$$(1+z)^5 = (1-z)^5.$$

(iii) Selesaikan

$$\sin z = -2i.$$

(50 markah)

(b) Dengan menggunakan Teorem De Moivre, buktikan bahawa

$$\sin 5\theta = 16 \sin^5\theta - 20 \sin^3\theta + 5 \sin\theta.$$

Seterusnya deduksikan bahawa

$$\sin^2 72^\circ = \frac{1}{8} (5 + \sqrt{5}).$$

(50 markah)

2. (a) (i) Takrifkan titik cabang bagi suatu fungsi f .

(ii) Buktikan bahawa $f(z) = \ln z$ mempunyai titik cabang hanya di $z = 0$.

(iii) Dapatkan suatu cabang bagi $f(z) = \sqrt{z}$ supaya f analisis dan negatif di atas paksi nyata positif.

(50 markah)

(b) Pertimbangkan transformasi

$$w = \frac{2z + 3}{z - 4}.$$

Dapatkan imej di dalam satah- w bagi

(i) cakera $D_z : |z - 2i| \leq 2$,

(ii) bulatan $|z - 2| = 2$.

(50 markah)

3. (a) Lakarkan kontur

$$C : z(t) = \begin{cases} t + i(1+t^2), & -2 \leq t \leq 1 \\ 2 - t + i[3 - (t-2)^2], & 1 < t \leq 4 \end{cases}$$

(30 markah)

...3/-

(b) Takrifkan keselajaran suatu fungsi kompleks f di $z = z_0$. Diberi

$$f(z) = \text{Arg} \left(\frac{z - i}{z + i} \right).$$

Di manakah fungsi f selanjar?

(35 markah)

(c) Takrifkan keterbezaan suatu fungsi kompleks f di $z = z_0$. Tunjukkan

bahawa $f(z) = \bar{z}$ tidak terbezakan di mana-mana titik.

(35 markah)

4. (a) Dapatkan jejari penumpuan bagi siri Taylor untuk fungsi f yang diberi oleh

$$f(z) = \frac{\cos z}{e^z + 2}$$

di sekitar $z = 0$.

(30 markah)

(b) Kembangkan

$$f(z) = \frac{z}{(z - 1)(2 - z)}$$

di dalam siri Laurent untuk

(i) $1 < |z| < 2$

(ii) $|z - 1| > 1$

(iii) $0 < |z - 2| < 1$.

(35 markah)

(c) Dapatkan titik-titik singular bagi

$$f(z) = \frac{1}{z^2(e^z - 1)}.$$

Tentukan jenis-jenis titik singular berkenaan. Kira reja di setiap kutub.

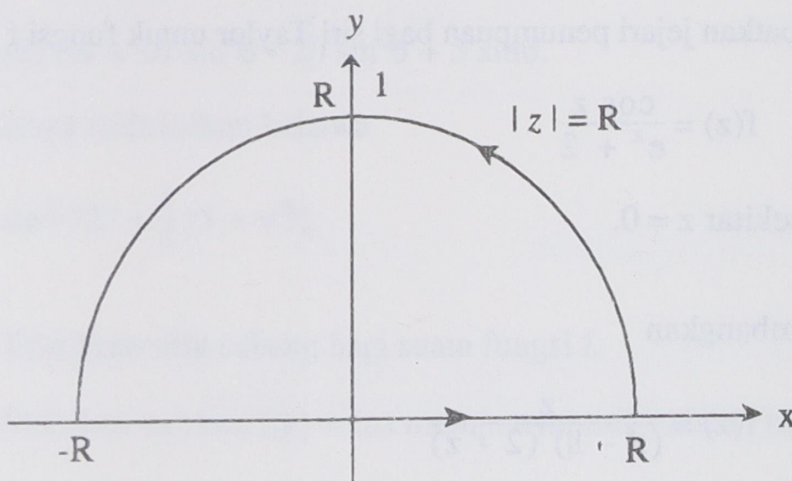
(35 markah)

5. (a) Dengan mengkamirkan $\frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$, $a > 0$ sepanjang kontur di dalam rajah 1, tunjukkan bahawa

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + a^2} dx = 0$$

dan

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a}, a > 0.$$

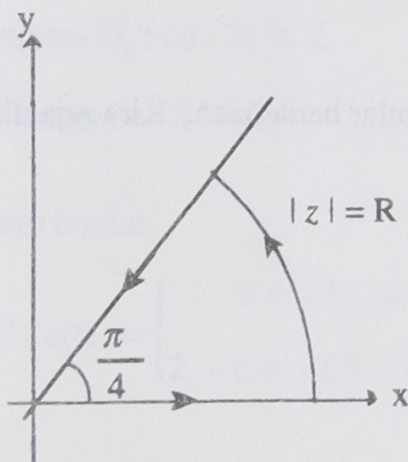


Rajah 1

(50 markah)

- (b) Dengan mengkamirkan e^{-z^2} sepanjang kontur tertutup yang ditunjukkan di dalam rajah 2, buktikan bahawa

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$



Rajah 2

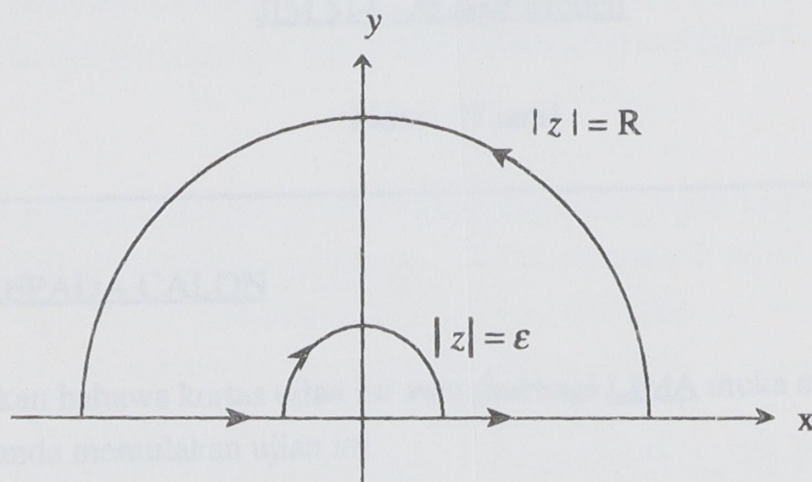
(50 markah)

...5/-

6. (a) Buktikan bahawa

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

dengan mengkamirkan $\frac{1 - e^{i2z}}{z^2}$ mengelilingi kontur di dalam rajah 3.



Rajah 3

(50 markah)

(b) Nilaikan, dengan menggunakan kamiran kompleks,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 + 3 \cos \theta} d\theta.$$

(50 markah)

- oooOooo -