

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

JAM 353 - Analisis Kompleks

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab SEMUA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira elektronik boleh digunakan.

1. (a) Buktikan bahawa:

$$(i) \left| \int_C \frac{e^z}{z} dz \right| \leq 2\pi e^r,$$

C ialah bulatan berpusat di asalan berjejari r , diperihalkan melawan arah jam.

$$(ii) \left| \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \pi, \text{ C ialah separuh atas bulatan berpusat}$$

di asalan dengan jejari r , diperihalkan melawan arah jam.

(40 markah)

(b) Nilaikan $\int_C \frac{dz}{1 + |z|^2}$ diberi :

(i) C ialah paksi nyata dari $z = -1$ ke $z = 1$;

(ii) C ialah separuh atas bulatan berpusat di asalan dengan jejari 1, berorientasi melawan arah jam.

(40 markah)

(c) Nyatakan teorem modulus maksimum. Dengan menggunakan teorem ini dapatkan nilai maksimum bagi $|\cos z|$ di dalam dan di atas segiempat sama dengan bucu-bucu $\pi \pm ib, -\pi \pm ib$.

(20 markah)

2. (a) Buktikan teorem kamiran Cauchy:

"Biarkan f analisis di dalam dan di atas kontur ringkas tertutup C berorientasi melawan arah jam. Jika z_0 sebarang titik di dalam C , maka

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} "$$

(35 markah)

...3/-

(b) Nilaikan:

(i) $\int_C \frac{\sin^2 \pi z}{2z + 3} dz$, C ialah segiempat sama dengan bucu-bucu

$z = 1 \pm i, -1 \pm i$, diperihalkan melawan arah jam.

(ii) $\int_C \frac{\sin^2 \pi z}{3z + 1} dz$, C seperti di dalam (i).

(iii) $\int_C \frac{dz}{z^4 + 1}$, C ialah segiempat dengan bucu-bucu

$z = \pm 2, \pm 2 + 2i$, diperihalkan melawan arah jam.

(45 markah)

(c) Rumus kamiran Cauchy boleh dibezakan terhadap z berulang kali untuk menghasilkan

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Dengan menggunakan rumus ini nilaikan

$$\int_C \frac{\cos^6 z}{\left(z - \frac{\pi}{6}\right)^3} dz,$$

C ialah bulatan $|z| = 1$ berorientasi positif.

(20 markah)

3. (a) Nyatakan serta buktikan teorem Taylor untuk fungsi kompleks f .

(50 markah)

...4/-

- (b) Tanpa mengembangkan di dalam siri Taylor, nyatakan jejari penumpuan siri Taylor disekitar titik yang diberi untuk tiap-tiap fungsi yang disenaraikan di bawah.

(i) $\frac{e^z}{z(z^2 - 4z + 29)}$, $z = 3i$.

(ii) $\frac{\sin z}{1 + \cos z}$, $z = i$.

(iii) $e^{z + \frac{1}{z}}$, $z = 2$.

(30 markah)

- (c) Dapatkan siri Maclaurin bagi $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Dengan menggunakan penggantian yang sesuai, dapatkan siri Maclaurin bagi $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Seterusnya dapatkan siri Maclaurin bagi $f(z) = \tan^{-1}z$.

(20 markah)

4. (a) Nyatakan teorem Laurent. Terangkan sebab perlunya teorem ini.

(25 markah)

- (b) Dapatkan siri Laurent bagi

$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ di dalam domain:

(i) $0 < |z| < 1$;

(ii) $|z| > 1$.

(30 markah)

(c) Cari kesingularan dan tentukan jenisnya untuk tiap-tiap fungsi kompleks f berikut.

(i) $f(z) = \cot z.$

(ii) $f(z) = \frac{1}{e^z(e^z + 1)}.$

(iii) $f(z) = \cos\left(\frac{1-z}{1+z}\right).$

(45 markah)

5. (a) Tentukan kutub bagi fungsi

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + 2z + 2)}$$

dan kira reja dikutuh-kutub ini. Seterusnya nilaikan

$$\int_C \frac{dz}{z^2(z^2 + 2z + 2)}$$

diberi:

(i) C ialah bulatan $|z| = 1,$

(ii) C ialah bulatan $|z| = 2,$

berorientasi positif.

(40 markah)

(b) Nilaikan kamiran tak tentu

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4 \sin \theta} d\theta.$$

(30 markah)

...6/-

- (c) Dengan menggunakan kamiran kontur dan teorem kamiran Cauchy nilaikan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + 9} dx .$$

(30 markah)

oooooooooooo