UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

JAM 352 - Aljabar Moden I

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan berkenaan.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira eletronik boleh digunakan.

...2/-

1. (a) Katakan A, B dan C ialah set. Buktikan :

(i) $A - B = A \Leftrightarrow B - A = B$

(ii) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$
$= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

(20 markah)

(b) Fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ditakrifkan oleh $(x)f = x^3 - x + 10$.
(Di sini $\mathbb{R}$ = set semua nombor nyata). Tentukan sama ada f

(i) satu-ke-satu
(ii) keseluruh.

(20 markah)

(c) Fungsi g dan h ditakrifkan seperti berikut :

$$(x)g = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$(x)h = \begin{cases} x + 2, & x \leq 0 \\ x - 2, & x > 0 \end{cases}$$

Cari $(x)(goh)$ dan $(x)(hog)$.

(20 markah)

(d) Suatu hubungan W ditakrifkan atas $\mathbb{R}$ dengan
$xWy \Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) > 0$. Tentukan sama ada W

(i) refleksif
(ii) simetri
(iii) transitif

Cari $[1.5]W$.

(20 markah)

(e) Cari semua integer x dan y yang memenuhi persamaan

$$2x + 5y \equiv 6 \pmod 9$$
$$3x + 7y \equiv 8 \pmod 9$$

(20 markah)

2. (a) Katakan $G = \mathbb{R} - \{0\}$. Operasi * ditakrifkan atas G dengan

$$a * b = |a| b.$$

Tentukan sama ada identiti kiri atau identiti kanan wujud.

(20 markah)

(b) Katakan $G = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R} \text{ dan } a \neq 0\}$. Suatu operasi * ditakrifkan atas G dengan

$$(a, a) * (b, b) = (2ab, 2ab)$$

Cari identiti bagi * dan songsang bagi $(a, a) \in G$.

(20 markah)

(c) Katakan $G = \{e, a, b\}$ dan operasi * ditakrifkan atas G dengan

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	a
b	b	b	e

Tentukan sama ada <G, *> suatu kumpulan.

(20 markah)

(d) Buktikan bahawa sebarang kumpulan yang mempunyai 4 unsur adalah abelan.

(40 markah)

3. (a) Katakan S_n = kumpulan pilihatur darjah n dan A_n = set semua pilihatur yang genap dari S_n.

   Buktikan $|S_n| = 2|A_n|$.

   (30 markah)

   (b) Tunjukkan bahawa sebarang pilihatur $f \in S_n$, $n \geq 2$ yang bukan fungsi identiti boleh ditulis sebagai satu kitar atau suatu hasil darab kitar-kitar yang tak bercantum.

   (40 markah)

   (c) Katakan peringkat bagi pilihatur α ialah suatu integer ganjil. Buktikan bahawa α adalah suatu pilihatur genap.

   (30 markah)

4. (a) Tunjukkan bahawa $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ adalah suatu kumpulan kitaran tetapi $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ bukan kumpulan kitaran.

   (20 markah)

   (b) Katakan H ialah suatu subkumpulan bagi suatu kumpulan $\langle G, * \rangle$ dan K ialah suatu subkumpulan normal bagi G.

   (i) Buktikan HK adalah suatu subkumpulan bagi G.
   (ii) Tentukan sama ada HK suatu subkumpulan normal bagi G.

   (50 markah)

(c) katakan <G, *> ialah suatu kumpulan dan $a \in G$. Jika

$O(a) = n$ buktikan

$$O(a^r) = \frac{n}{[n, r]}$$

Di sini r ialah suatu integer positif dan [n, r] = pembahagi sepunya terbesar bagi n dan r.

(30 markah)

5. (a) Katakan ϕ ialah suatu homomorfisma daripada kumpulan <G, o> kepada kumpulan <H, *> dan e ialah identiti bagi G. Jika Inti $\phi = \{ e \}$, buktikan ϕ adalah satu-ke-satu.

(20 markah)

(b) Katakan G ialah suatu kumpulan terhingga dan H ialah suatu subkumpulan bagi G. Jika $| G | = 2 | H |$, buktikan bahawa

$$a^2 \in H \text{ bagi semua } a \in G.$$

(20 markah)

(c) Buktikan bahawa

$$K = \{ e, (1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 3)(2\ \ 4), (1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$$

adalah suatu subkumpulan normal bagi A_4. Di sini A_4 ialah kumpulan selang-seli darjah 4.

(40 markah)

(d) Katakan H dan K dua subkumpulan normal bagi suatu kumpulan <G, *> dan e = unsur identiti. Jika $H \cap K = \{ e \}$, buktikan

$$a * b = b * a \quad \forall\, a \in H \text{ dan } \forall\, b \in K.$$

(20 markah)

...6/-

6. (a) Katakan

$$G = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^2 + b^2 \neq 0\}$$

Operasi * ditakrifkan atas G dengan

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Tunjukkan bahawa <G, *> merupakan suatu kumpulan. Jika fungsi f ditakrifkan dari <G, *> ke $<\mathbb{R} - \{0\}, x>$ dengan $(a, b)f = \sqrt{a^2 + b^2}$, tunjukkan bahawa f adalah suatu homomorfisma dan cari Inti f.

(40 markah)

(b) Katakan <R, +, x> ialah suatu gelanggang dan

$$S = \{a \in R \mid a \times b = b \times a \;\; \forall \;\; b \in R\}.$$

Buktikan bahawa S adalah suatu subgelanggang bagi R.

(20 markah)

(c) Buktikan bahawa sebarang domain integer yang terhingga adalah suatu medan.

(40 markah)

oooooOooooo