UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

JAM 243 - Kaedah Matematik

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab SEMUA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira elektronik boleh digunakan.

...2/-

1. (a) Dapatkan vektor normal kepada satah yang ditentukan oleh titik-titik A(-2, 1, 3), B(1, 2, -1) dan C(-3, -2, 1).

(12 markah)

(b) Kira kerja terlaksana oleh medan daya

$$\underline{F}(x, y, z) = (x - z)\hat{i} + (1 - xy)\hat{j} + y\hat{k}$$

di dalam menggerakkan sebutir zarah di sepanjang suatu garis lurus dari titik (-1, -1, -1) ke (0, 0, 0).

(12 markah)

(c) Buktikan $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s - a}$, $s > a$. Dengan ini dapatkan $\mathcal{L}\{\cosh at\}$.

(14 markah)

(d) Nilaikan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s + 3}{s^2 + 11}\right\}$.

(12 markah)

(e) Kembangkan $f(x) = x^2$, $0 < x < L$, di dalam siri Faurier kosinus.

$$\left[\text{Gunakan} \int_0^L x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2L^3(-1)^n}{n^2\pi^2}\right].$$

(14 markah)

(f) Lakarkan graf

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{L}{2}, \\ L-x, & \frac{L}{2} \le x \le L, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x + 2L) &= f(x) \\ f(-x) &= -f(x) \end{aligned} \quad \text{untuk semua nilai } x.$$

(12 markah)

...3/-

(g) Tuliskan nombor kompleks

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)^{11}$$ di dalam bentuk a + ib, di mana $i = \sqrt{-1}$.

(12 markah)

(h) Tunjukkan bahawa

$$i^{(-2i)} = e^{\pi + 4k\pi}$$

di mana $i = \sqrt{-1}$, k nombor integer.

(12 markah)

2. Di dalam soalan ini $z = x + iy$ di mana $x , y \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

(a) Cari imej jalur $1 < \mathrm{Im}(z) < 2$ di bawah pemetaan $w = z^2$.

(20 markah)

(b) Selesaikan:

(i) $z^3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$,

(ii) $\sin z = i$.

(30 markah)

(c) Katakan

$$w = f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

dengan $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Dengan menggunakan koordinat transformasi

$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta,$$

tunjukkan bahawa persamaan Cauchy-Riemaan di dalam koordinat kutub diberi oleh

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \ , \quad r \neq 0 .$$

...4/-

[Catatan: Persamaan Cauchy-Riemaan di dalam koordinat Cartesan diberi oleh $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$].

(25 markah)

(d) Jika $f(z) = u + iv$ suatu fungsi analisis, tunjukkan bahawa dua famili lengkung

$$u = \alpha \quad \text{dan} \quad v = \beta$$

berortogon pada satah-xy, α dan β merupakan dua pemalar.

(25 markah)

3. (a) Nyata serta buktikan teorem anjakan pertama. Dengan menggunakan teorem ini dapatkan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s - 1}{4s^2 - 16s - 17}\right\} .$$

(25 markah)

(b) Buktikan

$$\mathcal{L}\{t\, f(t)\} = -\frac{d}{ds}\ \mathcal{L}\{f(t)\}$$

dan

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2}\ \mathcal{L}\{f(t)\} .$$

Seterusnya nilaikan:

(i) $\mathcal{L}\{t^2 \sin kt\}$

(ii) $\mathcal{L}\{t^2 e^{-5t} \sin kt\}$.

(35 markah)

(c) Dengan menggunakan kaedah Jelmaan Laplace, selesaikan sistem persamaan

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - x + y = 2\cos t,$$

...5/-

$$3\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - x + y = e^t,$$

$$x(0) = 0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad y(0) = 0 \text{ dan } \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

(40 markah)

4. (a) Nilaikan fluks medan vektor
$\underline{F} = 2\hat{i} - 3x\hat{j} + y\hat{k}$ menerusi permukaan $x + 3y + 2z = 6$ di dalam oktan pertama.

(25 markah)

(b) (i) Nyatakan teorem Green.

(ii) Lakarkan rantau R yang dibatasi oleh elips $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$.

Dengan menggunakan teorem Green tunjukkan bahawa

$$\iint_R (x^2 + y^2)\, dxdy = 3\pi\sqrt{35}.$$

(35 markah)

(c) (i) Buktikan bahawa medan vektor
$\underline{F} = (2x\cos y - 3)\hat{i} - (x^2 \sin y + z^2)\hat{j} - (2yz - 2)\hat{k}$
abadi. Seterusnya dapatkan medan skalar ϕ supaya
$\underline{F} = -\nabla\phi$.

(ii) Nilaikan $\int_C \underline{F}.d\underline{r}$, C ialah sebarang lintasan yang menyambung titik-titik (0, 0, 0) dan (1, 1, 1) dan $\underline{F}$ diberi di dalam (i).

(40 markah)

...6/-

5. Pertimbangkan masalah nilai sempadan

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\alpha}{c}(u - 1)\,,\ 0 \le x \le L\ ,\ t \ge 0\,, \\ u(0, t) = 1,\ t \ge 0\,, \\ u(L, t) = 1,\ t \ge 0\,, \\ u(x, 0) = x,\ 0 \le x \le L\,, \end{array}\right\} \quad (A)$$

dengan c dan α sebagai pemalar.

(i) Dengan menggunakan penggantian

$$u(x, t) = 1 + v(x, t)e^{-\alpha t}$$

tunjukkan bahawa masalah nilai sempadan (A) dapat diturunkan kepada masalah nilai sempadan

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial v}{\partial t}\,,\ 0 \le x \le L\ ,\ t \ge 0, \\ v(0, t) = 0\ ,\ t \ge 0\,, \\ v(L, t) = 0\ ,\ t \ge 0\,, \\ v(x, 0) = x - 1\ ,\ 0 \le x \le L\,. \end{array}\right\} \quad (B)$$

(20 markah)

(ii) Selesaikan masalah nilai sempadan (B).

(70 markah)

(iii) Seterusnya, tunjukkan bahawa penyelesaian masalah nilai sempadan (A) diberi oleh

$$u(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{t}{L^2}(\alpha L^2 + n^2\pi^2 c)}$$

dengan koefisien b_n diberi oleh

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}(2-L), & n \text{ ganjil,} \\ \dfrac{2L}{n\pi}, & n \text{ genap.} \end{cases}$$

(10 markah)

...8/-

LAMPIRAN

Sifir Jelmaan Laplace

f(t)	F(s) = {f(t)}
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
t^n, n = integer positif	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$, $s > a$
cos at	$\frac{s}{s^2 + a^2}$, $s > 0$
sin at	$\frac{a}{s^2 + a^2}$, $s > 0$
sinh at	$\frac{a}{s^2 - a^2}$, $s > \mid a \mid$
cosh at	$\frac{s}{s^2 - a^2}$, $s > \mid a \mid$

oooooOooooo