UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

JAM 241 - Persamaan Pembezaan/Ruang Vektor

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

- Jawab SEMUA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.

- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

- Alat pengira elektronik boleh digunakan.

...2/-

1. Diberi persamaan pembezaan pembezaan

$$x^2y'' + xy' + (x - 2)y = 0. \qquad (*)$$

(a) Tunjukkan persamaan pembezaan (*) mempunyai titik singular sekata pada $x = 0$.

(b) Tentukan :

(i) persamaan indeksan ,

(ii) hubungan jadi-semula,

(iii) dan punca-punca (r_1 dan r_2) bagi persamaan indeksan.

(c) Dapatkan penyelesaian bersiri ($x > 0$) berpadanan dengan punca yang lebih besar. Jika $r_1 \neq r_2$ dan $r_1 - r_2$ bukan integer, dapatkan penyelesaian bersiri berpadanan dengan punca yang lebih kecil.

(100 markah)

2. Katakan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Dapatkan nilai eigen bagi A.

(b) Cari tiga penyelesaian yang tak bersandar linear bagi sistem persamaan pembezaan

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(c) Jika $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}$, dapatkan penyelesaian bagi masalah nilai awal.

(100 markah)

...3/-

3. Pertimbangkan sistem persamaan pembezaan

$$\underset{\sim}{X}' = A\underset{\sim}{X} + g(t) \qquad (*)$$

di mana $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ dan $g(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix}$.

(a) Cari nilai eigen serta vektor eigen bagi sistem homogen $\underset{\sim}{X}' = A\underset{\sim}{X}$.

(b) Tunjukkan bahawa matriks penyelesaian asas bagi sistem homogen $\underset{\sim}{X}' = A\underset{\sim}{X}$ ialah $\psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$.

(c) Dapatkan semua penyelesaian $\underset{\sim}{X}$ bagi sistem tak homogen $\underset{\sim}{X}' = A\underset{\sim}{X} + g(t)$.

(100 markah)

4. (a) Tentukan sama ada set $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ bersandar linear atau tidak.

(20 markah)

(b) Tunjukkan bahawa $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ adalah asas bagi R^3.

(30 markah)

(c) Di beri matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, tunjukkan ia dapat dipepenjurukan. Kemudian, dapatkan matriks P dan D supaya $A = P^{-1}DP$ di mana D adalah matriks pepenjuru.

(50 markah)

...4/-

5. (a) Katakan $P = \{g | g = a_2x^2 + a_1x + a_0, a_2 \neq 0\}$ dengan operasi penambahan:

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0)$$
$$= (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

dan operasi pendaraban skalar:

$$\alpha(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (\alpha a_2)x^2 + (\alpha a_1)x + \alpha a_0 .$$

Adakah P subruang bagi ruang vektor fungsi nyata? Beri asalan.

(20 markah)

(b) Dapatkan suatu asas dan tentukan dimensi pada subruang bagi ruang vektor yang dinyatakan.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \; a + b - c = 0 \right\} \subset R^3 .$$

(40 markah)

(c) Diberi set $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Perluaskan set M untuk mendapatkan suatu asas bagi ruang vektor R^3.

(40 markah)

oooooOooooo