

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

JAM 231 - Kalkulus Lanjutan

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
 - Jawab SEMUA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan dipenghujung subsoalan itu.
 - Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
 - Alat pengira elektronik boleh digunakan.
-

1. (a) Dengan menggunakan takrif $\epsilon - \delta$, buktikan bahawa:

(i) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2} (3x - 1) = \frac{11}{2}$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 1) = a^2 + 1$.

(25 markah)

(b) Dengan menggunakan konsep $\epsilon - \delta$, tunjukkan bahawa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ tidak wujud.}$$

(15 markah)

(c) (i) Nyatakan Teorem Nilai Min.

(ii) Jika $f(x) = x^3 - 8x - 5$, buktikan bahawa f memenuhi hipotesis Teorem Nilai Min pada selang $[1, 4]$. Cari nombor c di dalam selang terbuka $(1, 4)$ yang memenuhi kesimpulan teorem tersebut.

(30 markah)

(d) Cari ekstremum tempatan bagi fungsi f jika

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} (x^2 - 8).$$

Lakarkan graf f .

(30 markah)

2. (a) Tentukan sama ada fungsi berikut selanjar pada titik yang diberikan. Jika tidak, tentukan sama ada ketakselajaran ini penting ataupun terbuang. Jelaskan jawapan anda.

$$(i) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & x \neq -1 \\ -2, & x = -1 \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(iii) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

(30 markah)

- (b) Jika fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ terbezakan pada c , buktikan f selanjar pada c .

(20 markah)

- (c) Tentukan sama ada siri berikut menumpu atau mencapah.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!(n^3 + 1)}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)}$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(30 markah)

(d) Buktikan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \quad \text{jika } |r| < 1.$$

(20 markah)

3. (a) Cari had jujukan $\left\{ \frac{\cos^2 n}{8^n} \right\}$.

(20 markah)

(b) Tunjukkan bahawa siri takterhingga $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ mencapah.

(10 markah)

(c) Cari jejari dan selang penumpuan bagi siri kuasa :

(i)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n \ln n}{e^{2n}}.$$

(ii)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+4)^n}{\sqrt{3n+4}}.$$

(40 markah)

(d) Dengan menggunakan ujian kamiran, uji penumpuan siri berikut:

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)^2}.$$

(ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n^2}.$$

(iii)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

(30 markah)

4. (a) Tentukan sama ada siri berikut menumpu secara mutlak, menumpu secara bersyarat atau mencapah.

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 1}.$$

(ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln(n+1)}{n+1}.$$

(30 markah)

- (b) (i) Nyatakan ujian Dirichlet.

- (ii) Dengan menggunakan ujian di atas, tunjukkan bahawa

siri fungsi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}.$$

menumpu secara seragam pada selang $[a, b]$, jika $p > 0$ dan $0 < a < b < 2\pi$.

(30 markah)

- (c) (i) Katakan $\{f_n\}$ suatu jujukan fungsi yang ditakrifkan atas selang $[a, b]$. Katakan $x \in [a, b]$ dan ϵ adalah sebarang nombor positif. Beri takrif penumpuan seragam bagi jujukan $\{f_n\}$.

- (ii) Buktikan teorem berikut:

Katakan $\{f_n\}$ suatu jujukan dan $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Katakan

$$R_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

Maka $\{f_n\}$ menumpu secara seragam atas I jika dan hanya

jika
$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

- (iii) Dengan menggunakan teorem di atas tunjukkan bahawa penumpuan jujukan

$$f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

menumpu ke $\frac{1}{1-x}$ secara seragam atas selang $I = [-a, a]$ jika $0 < a < 1$.

(40 markah)

5. (a) Cari polinomial Taylor $P_4(x)$ dan baki $R_5(x)$ (bentuk Lagrange) dalam siri kuasa $x - 1$ bagi fungsi.

$$f(x) = \sqrt{2-x}.$$

(20 markah)

- (b) Dengan menggunakan takrif siri kuasa, kembangkan

$$\ln(1+x).$$

Dengan ini, cari nilai hampiran bagi

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

jitu kepada empat titik perpuluhan.

(20 markah)

(c) (i) Nyatakan Ujian-M-Weierstrass.

(ii) Dengan menggunakan ujian ini, tunjukkan bahawa siri fungsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$$

menumpu secara seragam pada selang $[1, 2]$.

(30 markah)

(d) (i) Nyatakan Petua L'Hopital.

(ii) Cari

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$$

(iii) Cari

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

(30 markah)

oooooooooooo

