

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

JAM 221 - Kalkulus II

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
 - Jawab SEMUA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
 - Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
 - Alat pengira elektronik boleh digunakan.
-

1. (a) Cari persamaan pembezaan linear homogen peringkat kedua jika set penyelesaian asasinya diberi oleh

$$e^{-2x} \cos \sqrt{7} x, e^{-2x} \sin \sqrt{7} x.$$

(12 markah)

- (b) Cadangkan bentuk penyelesaian khusus bagi persamaan

$$y'' - 6y' + 9y = (x^3 + 1)e^{3x} + x \sin 2x.$$

(Jangan selesaikan)

(12 markah)

- (c) Diberi $z = 5x + uy - uv$, $u = x - y$ dan $v = x + y$.
Kira

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y.$$

(12 markah)

- (d) Taburan suhu T bagi suatu objek diberi oleh

$$T(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2 + x + 3y.$$

Cari arah pada titik $(-2, 1)$ supaya kadar tokokan suhu adalah terbesar. Nyatakan nilai kadar tokokan ini.

(12 markah)

- (e) Dengan menggunakan kamiran berganda nilaikan luas rantau yang dibatasi oleh lengkung $y = x^2$ dan $y = 4x - x^2$.

(14 markah)

- (f) Tukarkan tertib kamiran terlelar

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sqrt{8+y^3} \, dy \, dx.$$

(Jangan dinilai kamiran ini).

(14 markah)

- (g) Jika $\underline{a} = 2\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$, $\underline{b} = 3\underline{i} + \underline{k}$ dan $\underline{c} = 5\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}$, nilaikan $\underline{c} \cdot \underline{b} \times \underline{a}$.

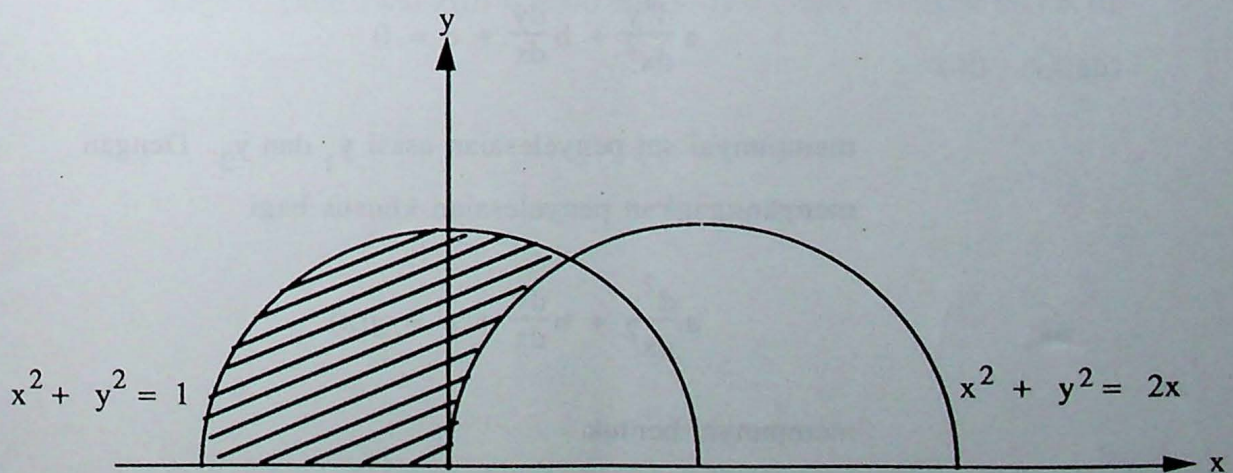
(12 markah)

- (h) Kira sudut di antara dua vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ yang diberikan di dalam soalan (g) di atas.

(12 markah)

2. (a) Perihalkan domain (kawasan berlorek) di dalam rajah di bawah dengan menggunakan:

- koordinat Cartesan, garis tegak sebagai garis tipikal;
- koordinat kutub.



(30 markah)

(b) Nilaiikan

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy.$$

(30 markah)

(c) Lakarkan bongkah yang dibatasi oleh sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ dan paraboloid $4z = x^2 + y^2 + 4$. Dengan menggunakan koordinat silinder, buktikan bahawa isipadu bongkah ini diberi oleh

$$\frac{2\pi}{3} (16\sqrt{2} - 17).$$

(40 markah)

3. (a) (i) Katakan f_1 dan f_2 sebarang dua fungsi. Takrifkan Wronskian $W(f_1, f_2)$.

(ii) Biarkan persamaan pembezaan linear homogen peringkat kedua dengan koefisien malar

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + c = 0$$

mempunyai set penyelesaian asasi y_1 dan y_2 . Dengan menganggapkan penyelesaian khusus bagi

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + c = g(x)$$

mempunyai bentuk

$$y_k = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2,$$

tunjukkan bahawa v_1 dan v_2 diberi oleh

$$\frac{dv_1}{dx} = -\frac{y_2 g}{aW(y_1, y_2)},$$

$$\frac{dv_2}{dx} = \frac{y_1 g}{aW(y_1, y_2)}.$$

(iii) Dengan menggunakan kaedah di atas dapatkan penyelesaian khusus untuk

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$$

(60 markah)

(b) Selesaikan sistem persamaan

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 2y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x + 4y,$$

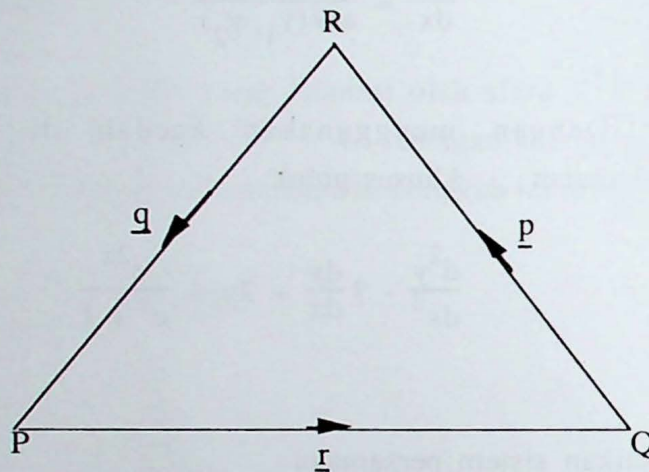
dengan syarat awal $x(0) = 5000$ dan $y(0) = 2000$. Bilakah $y(t) = 0$?

(40 markah)

4. (a) Dengan menggunakan vektor, tunjukkan bahawa untuk sebarang segitiga PQR (lihat rajah di bawah)

$$\frac{\sin P}{p} = \frac{\sin Q}{q} = \frac{\sin R}{r},$$

dengan $p = |\underline{p}|$, $q = |\underline{q}|$ dan $r = |\underline{r}|$.



(45 markah)

- (b) Jika $\underline{a} = 3\underline{i} + 5\underline{j} - 2\underline{k}$, $\underline{b} = -\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$ dan $\underline{c} = 2\underline{i} - \underline{j} + 4\underline{k}$,
dapatkan komponen vektor $\underline{b}$ searah dengan vektor $\underline{a} - 2\underline{c}$.

(20 markah)

- (c) Suatu satah melalui titik $(1, 5, -3)$, $(3, 0, 5)$ dan $(3, 4, 3)$. Cari persamaannya di dalam bentuk analisis. Kira sudut di antara satah ini dengan satah-xy.

(35 markah)

5. (a) Jika $u^2 + 2x = v^2$ dan $uv - y = 0$, tunjukkan bahawa

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y = \frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Seterusnya dapatkan $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

(30 markah)

(b) Diberi $z = \frac{E^2 \cos \theta}{Q^2}$.

(i) Tunjukkan bahawa

$$dz = \frac{E^2 \cos \theta}{Q^2} \left[2 \frac{dE}{E} - \tan \theta d\theta - 2 \frac{dQ}{Q} \right].$$

(ii) Diketahui bahawa E , θ dan Q masing-masing mengalami kemungkinan ralat 0.8%, 1% dan 0.6%. Kira peratus ralat maksimum yang mungkin bagi nilai z apabila $\theta = \frac{\pi}{6}$.

(40 markah)

(c) Tunjukkan bahawa

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\pi} \frac{e^{xt} \sin t}{t} dt = \frac{e^{\pi x} + 1}{x^2 + 1}.$$

(30 markah)

oooooooo

1. The first part of the paper is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$$

It is shown that the function $f(x)$ is continuous and that it satisfies the functional equation

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$$

2. The second part of the paper is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$$

It is shown that the function $f(x)$ is continuous and that it satisfies the functional equation

3. The third part of the paper is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$$

It is shown that the function $f(x)$ is continuous and that it satisfies the functional equation

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$$