
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2007/2008

Jun 2008

MSS 211 – Modern Algebra
[Aljabar Moden]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all eight** [8] questions.

Arahan : Jawab **semua lapan** [8] soalan.]

1. State De Morgan's Theorem. Hence, given the sets A , B and C , prove or disprove the following statements:

$$(a) \quad A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C),$$

$$(b) \quad A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C).$$

[10 marks]

2. (i) Define "onto functions".

(ii) Given that $f: A \rightarrow B$ and $g: B \rightarrow C$ are functions such that $f \circ g$ is onto, show that g is onto.

(iii) Given the functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ where $(x)f = \frac{3-x}{x^2+4}$ and

$(x)g = \sqrt{x^2+1}$, define $f \circ g$. Hence, determine which of f , g and $f \circ g$ are onto.

[12 marks]

3. Consider the binary system $\langle S, * \rangle$ in the Cayley table below:

$*$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	d	e	c
b	b	c	e	d	a
c	c	d	a	b	e
d	d	e	c	a	b

- (a) State the definition of a group and hence determine whether $\langle S, * \rangle$ is a group.
- (b) State Lagrange's Theorem and its corollary on the order of elements. Without using the result in (a), use this corollary to determine whether $\langle S, * \rangle$ is a group. Discuss also the possible value(s) of the order of the element a .

[15 marks]

...3/-

1. Nyatakan Teorem De Morgan. Dengan demikian, diberikan set A , B dan C , buktikan atau sangkalkan pernyataan berikut:

$$(a) A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C),$$

$$(b) A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C).$$

[10 markah]

2. (i) Takrifkan "fungsi keseluruhan".

(ii) Diberikan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ merupakan fungsi-fungsi supaya $f \circ g$ fungsi keseluruhan, tunjukkan bahawa g keseluruhan.

(iii) Diberikan fungsi-fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $(x)f = \frac{3-x}{x^2+4}$

dan $(x)g = \sqrt{x^2+1}$, takrifkan $f \circ g$. Dengan demikian, tentukan yang manakah di antara f , g dan $f \circ g$ merupakan fungsi keseluruhan.

[12 markah]

3. Pertimbangkan sistem dedua $\langle S, * \rangle$ yang dipaparkan oleh sifir Cayley berikut:

$*$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	d	e	c
b	b	c	e	d	a
c	c	d	a	b	e
d	d	e	c	a	b

(a) Nyatakan takrif bagi kumpulan dan dengan itu tentukan sama ada $\langle S, * \rangle$ merupakan suatu kumpulan.

(b) Nyatakan Teorem Lagrange serta korolarinya berkenaan peringkat unsur. Tanpa menggunakan keputusan di (a), gunakan korolari ini untuk menentukan sama ada $\langle S, * \rangle$ merupakan suatu kumpulan. Bincangkan juga nilai(-nilai) yang mungkin untuk peringkat unsur a .

[15 markah]

4. Suppose $\langle S, * \rangle$ is a binary system which contains two left identity elements. Show that it is not possible for $\langle S, * \rangle$ to contain a right identity element.

[12 marks]

5. (i) List all the elements of D_4 , the symmetries of a square with edges 1, 2, 3 and 4, and obtain the order of each element.
- (ii) Hence, obtain all the subgroups of D_4 , classifying each as normal or not.
- (iii) Obtain the Cayley table for the factor group D_4 / H for every non-trivial, proper normal subgroup H in D_4 .

[15 marks]

6. Write the definition of a *permutation on a set*. Given that $\langle G, * \rangle$ is a group, g is a fixed element of G , and the function $\lambda_g : G \rightarrow G$ where $(x)\lambda_g = x * g$ for all $x \in G$, show that λ_g is a permutation on G .

(a) For the case $\langle G, * \rangle = \langle S_3, \circ \rangle$, find $\lambda_{(1\ 2\ 3)}$ and $\lambda_{(1\ 3)}$.

(b) Show that for the general case, $\lambda_g \circ \lambda_h = \lambda_{g * h}$ for any fixed elements $g, h \in G$.

[12 marks]

7. Show that, up to isomorphism, there exist only two groups of order 4.

[12 marks]

8. State the definition of a ring. Hence, given $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, prove that $\langle \mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times \rangle$ is a ring. Discuss whether $\langle \mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times \rangle$ is a commutative ring.

[12 marks]

4. Katakan $\langle S, * \rangle$ merupakan suatu sistem dedua yang mempunyai dua unsur identiti kiri. Tunjukkan bahawa $\langle S, * \rangle$ tidak mengandungi unsur identiti kanan.

[12 markah]

5. (i) Senaraikan semua unsur bagi D_4 , kumpulan simetri segi empat sisi sama dengan bucu-bucu 1, 2, 3 dan 4, dan peringkat bagi setiap unsurnya.

(ii) Dengan demikian, dapatkan semua subkumpulan bagi D_4 , seterusnya klasifikasikan setiapnya sebagai subkumpulan normal atau tidak.

(iii) Dapatkan sifir Cayley bagi D_4/H untuk setiap subkumpulan normal H yang wajar dan tak remeh dalam D_4 .

[15 markah]

6. Tuliskan takrif bagi pilihatur atas suatu set. Diberikan $\langle G, * \rangle$ suatu kumpulan, g unsur tetap dalam G , dan fungsi $\lambda_g : G \rightarrow G$ sebagai $(x)\lambda_g = x * g$ bagi semua $x \in G$, tunjukkan bahawa λ_g merupakan suatu pilihatur atas G .

(a) Bagi kes $\langle G, * \rangle = \langle S_3, \circ \rangle$, cari $\lambda_{(1\ 2\ 3)}$ dan $\lambda_{(1\ 3)}$.

(b) Tunjukkan bahawa secara am, $\lambda_g \circ \lambda_h = \lambda_{g*h}$ bagi sebarang unsur tetap $g, h \in G$.

[12 markah]

7. Tunjukkan bahawa, setakat isomorfisma, wujud hanya dua kumpulan berperingkat 4.

[12 markah]

8. Nyatakan takrif gelanggang. Dengan itu, diberikan $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$,

buktikan bahawa $\langle \mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times \rangle$ merupakan suatu gelanggang. Bincangkan sama

ada $\langle \mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times \rangle$ suatu gelanggang kalis tukar tertib.

[12 markah]