
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2007/2008

April 2008

MSG 389 – Engineering Computation II
[Pengiraan Kejuruteraan II]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of ELEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEBELAS muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all three** [3] questions.

[Arahan: Jawab **semua tiga** [3] soalan.]

1. (a) We consider a 2x2 system of ordinary differential equations ODEs to describe the temporal distribution of mosquitoes living in a uniform habitat. We divide the mosquitoes into two components, one for the aquatic form represented by A and the second for the wing female mosquito represented by W, where A and W are population. The following equations are used,

$$\dot{V} = MV, \text{ where } V = \begin{pmatrix} W \\ A \end{pmatrix}, \dot{V} = \frac{dV}{dt} \text{ and } M = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \gamma \\ \beta & -\alpha_2 - \gamma \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{subject to initial condition } V(0) = \begin{pmatrix} W(0) \\ A(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_0 \\ A_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Let $\alpha_1 = 0.15 \text{ d}^{-1}$, $\alpha_2 = 0.10 \text{ d}^{-1}$, $\beta = 4.0 \text{ d}^{-1}$, $\gamma = 0.125 \text{ d}^{-1}$, $W_0 = 10$, $A_0 = 50$, d is day.

- (i) Find the eigen value and eigen vector of M.
 - (ii) Find two linearly independent solutions of the ODE (1).
 - (iii) Find the general solution.
 - (iv) Find the unique solution of the initial value problem IVP.
 - (v) Discuss the behavior of the solution in (iv) as time $t \rightarrow \infty$.
 - (vi) Solve the IVP by means of the Runge Kutta Order Two Method RK2 with time step of 0.1 day up to time 0.2 day.
 - (vii) Solve the IVP by means of the Runge Kutta Order Four Method RK4 to find the solution at time 0.1 day in one time step.
- (b) We now consider a discrete system of age cohorts to describe the population distributions of mosquitoes. We divide the aquatic form into 8 consecutive age classes A_i of 1 day each, $i = 1, 2, \dots, 8$. Similarly we divide the wing female form into 8 consecutive age classes W_j of 1 day each, $j = 1, 2, \dots, 8$. We assume that an aquatic age class A_8 at the end of $L_A = 8$ days will convert to the wing age class W_1 of age 1 day. Further the wing class W_8 will lay $b = 32$ eggs per mosquito at the end of $L_W = 8$ days and then it dies. Let $\alpha_1 = 0.15 \text{ d}^{-1}$ be the mortality rate of the wing form and $\alpha_2 = 0.10 \text{ d}^{-1}$ be the mortality rate of the aquatic form.
- (i) Explain why $\beta = b/L_W$ and $\gamma = 1/L_A$. Find β and γ .
 - (ii) Draw a life table to illustrate the cohort model setup.
 - (iii) Provide an algorithm with sufficient details to implement this cohort model.

1. (a) Pertimbangkan satu sistem 2x2 persamaan pembezaan biasa ODEs untuk taburan masa nyamuk yang tinggal di satu habitat seragam. Kita agihkan nyamuk tersebut kepada dua komponen, satu untuk bentuk aquatik yang diwakili oleh A dan kedua untuk bentuk bersayap yang diwakili oleh W , di mana A dan W ialah populasi. Persamaan berikut digunakan,

$$\dot{V} = MV, \text{ di mana } V = \begin{pmatrix} W \\ A \end{pmatrix}, \dot{V} = \frac{dV}{dt} \text{ dan } M = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \gamma \\ \beta & -\alpha_2 - \gamma \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{tertakluk kepada nilai awal } V(0) = \begin{pmatrix} W(0) \\ A(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_0 \\ A_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Biarkan $\alpha_1 = 0.15 \text{ d}^{-1}$, $\alpha_2 = 0.10 \text{ d}^{-1}$, $\beta = 4.0 \text{ d}^{-1}$, $\gamma = 0.125 \text{ d}^{-1}$, $W_0 = 10$, $A_0 = 50$, d ialah hari.

- (i) Cari nilai eigen dan vektor eigen bagi M .
 - (ii) Cari dua penyelesaian linear tak bersandar kepada ODEs (1).
 - (iii) Cari penyelesaian am.
 - (iv) Cari penyelesaian unik kepada masalah nilai awal IVP tersebut.
 - (v) Bincangkan kelakuan penyelesaian di (iv) apabila $t \rightarrow \infty$.
 - (vi) Selesaikan IVP dengan menggunakan Runge Kutta Peringkat Dua RK2 dengan langkah masa 0.1 hari hingga masa 0.2 hari.
 - (vii) Selesaikan IVP dengan menggunakan Runge Kutta Peringkat Empat RK4 untuk mendapatkan penyelesaian pada masa 0.1 hari dalam satu langkah masa.
- (b) Sekarang, pertimbangkan satu sistem diskret cohort umur untuk populasi nyamuk. Kita bahagikan bentuk aquatik kepada 8 kelas umur berturutan A_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ dengan setiap satu kelas berumur 1 hari. Demikian juga, kita bahagikan bentuk bersayap nyamuk betina kepada 8 kelas umur berturutan W_j , $j = 1, 2, \dots, 8$ dengan setiap satu kelas berumur 1 hari. Kita anggapkan bahawa kelas umur aquatik A_8 pada hujung $L_A = 8$ hari akan bertukar kepada kelas umur bersayap W_1 yang berumur 1 hari. Tambahan pula, kelas bersayap W_8 akan bertelur sebanyak $b = 32$ telur setiap nyamuk pada hujung $L_W = 8$ hari dan kemudian mati. Biar $\alpha_1 = 0.15 \text{ d}^{-1}$ ialah kadar kematian bentuk bersayap dan $\alpha_2 = 0.10 \text{ d}^{-1}$ ialah kadar kematian bentuk aquatik.
- (i) Terangkan kenapa $\beta = b/L_W$ dan $\gamma = 1/L_A$. Cari β dan γ .
 - (ii) Berikan satu jadual hayat untuk mengillustrasikan setup model cohort.
 - (iii) Berikan satu algoritma dengan butiran yang mencukupi untuk melaksanakan model cohort ini.

- (iv) The initial conditions at the *beginning* of day 1 are: $A_1 = 50$, $A_i = 0$ for $i = 2$ to 8; $W_1 = 10$, $W_j = 0$ for $j = 2$ to 8. Provide a life table to describe the initial condition. Find the population of A_i and W_j at the *end* of day 1, 2, 3. Give your answers in the form of a series of life tables.
- (v) Find the populations of A_i and W_j at the *end* of 8 days and 16 days.
- (vi) Describe what you would expect at the end of Day 24 and 32. What will be the population as time goes to infinity?
- (c) Consider the initial mosquito cohort population: $A_i = 10$ for all $i = 1, \dots, 8$ and $W_j = 5$ for all $j = 1, \dots, 8$. Derive the system of continuous ODE (1) and (2) to lump this cohorts of discrete mosquito population. Do not solve these ODEs.
- (d) Consider the following ODE for a population z with growth rate c and carrying capacity k , subject to initial condition.

$$\frac{dz}{dt} = cz(1 - z/k), z(0) = z_0 \quad (3)$$

Solve this initial value problem with $c = 1$ and $k = 9$, $z_0 = 3$. Plot the solution for all values of positive t . What is the steady state solution?

- (e) Write a system of 2x2 ODEs for mosquitoes (Equation 1) with carrying capacities k_1 and k_2 . Do not solve this system. Plot a possible solution to this system as time goes to infinity.

[100 marks]

2. (a) A small factory releases a chemical at the rate of $W = 0.1$ kg/s into a treatment pond. The pond has a volume of $V = 20000$ m³ and a constant inflow Q m³/s of clean water and a constant outflow Q m³/s of treated water with $Q = 0.1$ m³/s. The chemical has a decay rate of $k = 10^{-4}$ s⁻¹. Derive the ordinary differential equation ODE to describe the water quality in the pond. Solve the ODE to obtain the general solution. Given that the initial condition in the pond is 0.01 kg/m³, find the unique solution to the initial value problem. Plot the curve, with careful treatment as time goes to infinity. What is the steady state solution?
- (b) Assume now that the factory releases this chemical directly at the rate of $W = 0.1$ kg/s into a river with a river flow of $Q = 0.2$ m³/s. The river has the following dimension and flow parameters: width 10 m, depth 2 m, $k = 10^{-4}$ s⁻¹, dispersion 0 m²/s.
 - (i) Derive the PDE

- (iv) Nilai awal pada awal hari pertama ialah: $A_1 = 50$, $A_i = 0$ untuk $i = 2$ ke 8; $W_1 = 10$, $W_j = 0$ untuk $j = 2$ ke 8. Berikan satu jadual hayat untuk mewakili nilai awal tersebut. Cari populasi A_i dan W_j pada hujung hari 1, 2, 3. Berikan jawapan anda dalam siri jadual hayat.
- (v) Cari populasi A_i dan W_j pada hujung hari 8 and 16.
- (vi) Terangkan apa yang anda jangkakan pada hujung hari ke-24 and ke-32. Apakah populasi apabila masa menghampiri infiniti?
- (c) Pertimbangkan nilai awal populasi cohort nyamuk: $A_i = 10$ untuk semua $i = 1, \dots, 8$ dan $W_j = 5$ untuk semua $j = 1, \dots, 8$. Terbitkan sistem selangar ODE (1) dan (2) untuk mewakili cohort diskret populasi nyamuk. Jangan selesaikan ODEs ini.
- (d) Pertimbangkan ODE berikut untuk satu populasi z dengan kadar tumbesaran c dan kapasiti tumbesaran k , tertakluk kepada nilai awal.

$$\frac{dz}{dt} = cz(1 - z/k), \quad z(0) = z_0 \quad (3)$$

Selesaikan masalah nilai awal ini dengan $c = 1$ dan $k = 9$, $z_0 = 3$. Plotkan penyelesaian untuk semua nilai positif t . Apakah penyelesaian keadaan mantap?

- (e) Tulis satu sistem 2x2 ODEs untuk nyamuk (Persamaan 1) dengan kapasiti tumbesaran k_1 dan k_2 . Jangan selesaikan sistem ini. Plotkan salah satu penyelesaian kepada sistem ini apabila masa menghampiri infiniti.

[100 markah]

2. (a) Satu kilang kecil membuang suatu bahan kimia pada kadar $W = 0.1 \text{ kg/s}$ ke dalam satu kolam rawatan. Kolam ini mempunyai isipadu $V = 20000 \text{ m}^3$ dan satu aliran masuk malar $Q \text{ m}^3/\text{s}$ air bersih dan satu aliran keluar malar $Q \text{ m}^3/\text{s}$ air yang telah dirawat dengan $Q = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$. Bahan kimia ini mempunyai kadar pereputan $k = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Terbitkan persamaan pembezaan biasa ODE untuk menggambarkan kualiti air dalam kolam ini. Selesaikan ODE tersebut untuk mendapatkan penyelesaian amnya. Diberikan nilai awal dalam kolam ialah 0.01 kg/m^3 , cari penyelesaian unik kepada masalah nilai awal tersebut. Plotkan graf, dengan keterangan jelas semasa masa menghampiri infiniti? Apakah penyelesaian keadaan mantap?
- (b) Sekarang anggapkan bahawa kilang ini membuang terus bahan kimia tersebut pada kadar $W = 0.1 \text{ kg/s}$ ke dalam satu sungai dengan aliran $Q = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$. Sungai tersebut mempunyai dimensi dan parameter aliran berikut: lebar 10 m, kedalaman 2 m, $k = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, penyebaran $0 \text{ m}^2/\text{s}$.
- (i) Terbitkan PDE tersebut

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} - kc + W \quad (4)$$

to describe the water quality in the river. Solve this equation if the initial condition in the river is 0.012 kg/m^3 .

- (ii) Assume steady state is achieved. Divide the river into three segments with each segment having a length of 1000 m. Derive the 3x3 system of algebraic equations to describe the water quality in the river, where segment 1 receives the chemical. Solve the system for the concentrations in the three segments.
- (iii) Add two more similar segments to segment 3 in (ii) above to form 5 segments. Derive the 5x5 system of algebraic equations. Find the concentration in these 5 segments.
- (iv) Plot the solutions in (ii) and (iii) above in the same diagram to compare the two solutions.

(c) Consider the following initial value problem (IVP).

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x - y, \quad x(0) = x_0 = 1.0, \quad y(0) = y_0 = 2.0 \quad (5)$$

The formula for Runge-Kutta Method Order Two RK2 is

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + (k_1 + k_2)/2.0 \\ k_1 &= h f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h f(x_n + h, y_n + k_1). \end{aligned} \quad (6)$$

The following is a SUBROUTINE for the above problem.

```

C      SUBROUTINE RK2 (FCT, X0, Y0, DELTX, YNEW)
C      DELTX = h
C      REAL K1, K2
C      K1 = DELTX*FCT(X0,Y0)
C      K2 = DELTX*FCT(X0+DELT X, Y0+K1)
C      YNEW = Y0 + (K1 + K2)/2.0
C      RETURN
C      END

C      FUNCTION FCT (X,Y)
C      FCT = X - Y
C      RETURN
C      END

```

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} - kc + W \quad (4)$$

untuk menggambarkan kualiti air dalam sungai tersebut. Selesaikan persamaan ini jika nilai awal sungai tersebut ialah 0.012 kg/m^3 .

- (ii) Anggap keadaan mantap tercapai. Bahagikan sungai tersebut kepada tiga segmen dengan panjang setiap satu segmen ialah 1000 m. Terbitkan sistem 3x3 persamaan aljabar untuk menggambarkan kualiti air dalam sungai tersebut, di mana segmen 1 menerima bahan kimia tersebut. Selesaikan sistem ini untuk mendapatkan kepekatan di tiga segmen tersebut.
- (iii) Tambahkan dua segmen yang sama kepada segmen 3 pada (ii) di atas untuk membentuk 5 segmen. Terbitkan sistem 5x5 persamaan aljabar. Cari kepekatan di lima segmen tersebut.
- (iv) Plot penyelesaian (ii) dan (iii) di atas pada rajah yang sama untuk membandingkan dua penyelesaian tersebut.

(c) Pertimbangkan masalah nilai awal (IVP) berikut.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x - y, \quad x(0) = x_0 = 1.0, \quad y(0) = y_0 = 2.0 \quad (5)$$

Rumus bagi Kaedah Runge-Kutta Peringkat Dua RK2 ialah

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + (k_1 + k_2)/2.0 \\ k_1 &= h f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h f(x_n + h, y_n + k_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Berikut ialah SUBROUTINE bagi masalah di atas.

```

C      SUBROUTINE RK2 (FCT, X0, Y0, DELTX, YNEW)
C      DELTX = h
C      REAL K1, K2
C      K1 = DELTX*FCT(X0,Y0)
C      K2 = DELTX*FCT(X0+DELTX, Y0+K1)
C      YNEW = Y0 + (K1 + K2)/2.0
C      RETURN
C      END

C      FUNCTION FCT (X,Y)
C      FCT = X - Y
C      RETURN
C      END

```

Consider the following IVP.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x^2 + \sin y, \quad x(0) = x_0 = 0.0, \quad y(0) = y_0 = 1.0 \quad (7)$$

Give the Runge Kutta Order 4 (RK4) formula for IVP (7) above, similar to (6). Write a complete FORTRAN SUBROUTINE RK4 and FUNCTION for (7). Write a complete program with correct input format to solve IVP (7) using SUBROUTINE RK4 for x up to 0.8 and delta x = 0.1. Discuss the error involved in RK2 and Rk4 for the above two problems (5) and (7).

[100 marks]

3. (a) Find the dominant eigen value and its eigen vector for

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0.3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

by the Power Method.

Start with initial vector (0.2, 0.3, 1) and perform 4 iterations. Would these iterations converge and explain the reason.

Prove that this Power Method will converge to the dominant eigen value.

- (b) Consider the following diffusion equation:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 1].$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0.$$

Consider a solution by separation of variable with the form

$$u(x, t) = v(x) \cdot \exp(-\lambda t).$$

- (i) Derive the above diffusion equation with clear explanations.
- (ii) Obtain the ordinary differential equation and boundary condition for $v(x)$.
- (iii) Show that the eigen value for (ii) is $\lambda_n = \alpha (n\pi)^2 / \mu$, $n = 1, 2, 3 \dots$

Pertimbangkan IVP berikut.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x^2 + \sin y, \quad x(0) = x_0 = 0.0, \quad y(0) = y_0 = 1.0 \quad (7)$$

Berikan rumus Runge Kutta Peringkat 4 (RK4) untuk IVP (7) di atas, sama kepada (6). Tulis satu FORTRAN SUBROUTINE RK4 dan FUNCTION lengkap untuk (7). Tulis satu program lengkap dengan format input yang betul untuk menyelesaikan IVP (7) dengan menggunakan SUBROUTINE RK4 untuk x hingga ke 0.8 dan delta $x = 0.1$. Bincangkan ralat yang terlibat dalam RK2 dan Rk4 untuk masalah (5) dan (7) di atas.

[100 markah]

3. (a) Cari nilai eigen dominan dan vektor eigennya bagi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0.3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

dengan Kaedah Kuasa.

Mulakan dengan vektor awal (0.2, 0.3, 1) dan jalankan 4 lelaran. Adakah lelaran ini akan menumpu dan terangkan sebabnya.

Buktikan bahawa kaedah ini akan semakin menumpu ke nilai eigen dominan.

- (b) Pertimbangkan persamaan sebaran berikut:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 1].$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0.$$

Pertimbangkan penyelesaian melalui kaedah pemisahan pembolehubah berbentuk

$$u(x, t) = v(x) \cdot \exp(-\lambda t).$$

- (i) Terbitkan persamaan sebaran di atas dengan keterangan jelas.
- (ii) Dapatkan persamaan pembezaan biasa dan syarat sempadan untuk $v(x)$.
- (iii) Tunjukkan bahawa nilai eigen ialah $\lambda_n = \alpha (n\pi)^2 / \mu$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(c) *Pertimbangkan*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0. \quad (8)$$

$$u(x, 0) = f(x) = \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1].$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0.$$

Selesaikan masalah (8) di atas secara analitik. Tunjukkan bahawa $u(x, t) = \sin(\pi x) \cdot \exp(-4\pi^2 t)$. Apakah suhu $u(x)$ apabila $t \rightarrow \infty$?

Kita selesaikan $u(x, t)$ dari (8) secara berangka. Biarkan

$$U_{i,j} = u(x_i, t_j), \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

$$k = \Delta t, \quad h = \Delta x, \quad r = \frac{4k}{h^2}.$$

- (i) *Terbitkan skema kaedah Crank-Nicolson.*
- (ii) *Gunakan skema kaedah Crank-Nicolson dengan $k = 0.01$, $h = 0.25$ untuk mencari U pada $t = 0.01$. Terbitkan ralatnya.*
- (iii) *Bincangkan dengan jelas kestabilan dan kejituan skema kaedah Crank-Nicolson.*

[100 markah]