
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2007/2008

April 2008

MSG 228 – Introduction to Modelling
[Pengenalan Pemodelan]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all twelve** [12] questions.

Arahan: Jawab **semua dua belas** [12] soalan.]

1. Give two problems that can be modeled mathematically. Why do you think mathematics can be the key to these problems? What is the added value in each case?

[6 marks]

2. A simple population model can be written as

$$\frac{dx}{dt} = x$$

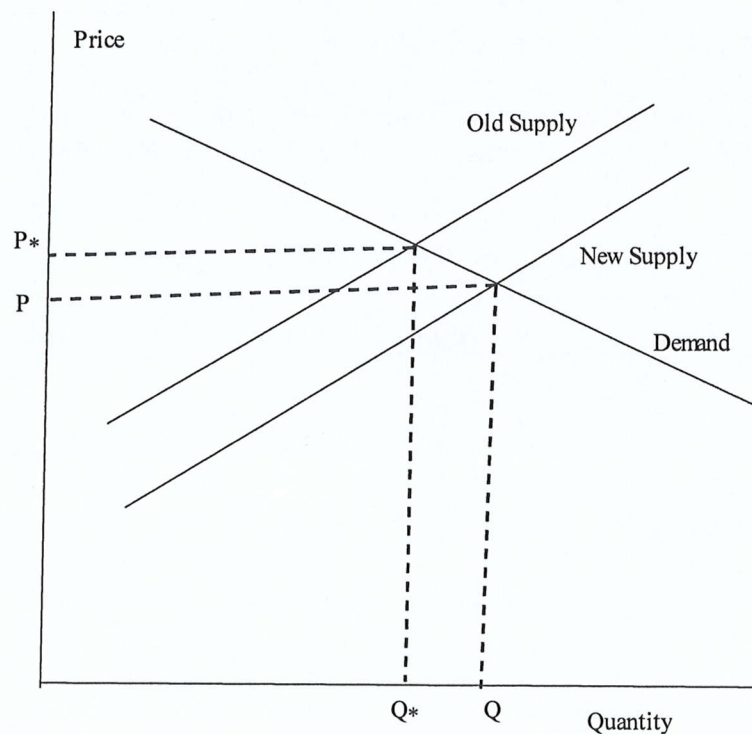
Convert this equation into a difference equation. Solve both equations and compare. Discuss.

[11 marks]

3. An off-shore island can have a number of species (plants and animals) living on it. What is the effect of distance of island from mainland on the number of species found on the island? Your answer must refer to the rate of immigration and rate of extinction curves.

[6 marks]

4. The diagram below tracks the supply and demand of a microprocessor component.



We find that supply falls and P is the new price with Q the new quantity supplied (which also is the new demand). Referring to the engineers and manufacturing process of the component, give an interpretation of the above graph.

[10 marks]

1. Beri dua contoh masalah yang boleh di modelkan secara matematik. Mengapakah anda fikir matematik boleh menjadi kunci kepada masalah-masalah ini? Apakah nilai tambah untuk setiap kes?

[6 markah]

2. Satu model ringkas untuk pertumbuhan populasi boleh ditulis seperti

$$\frac{dx}{dt} = x$$

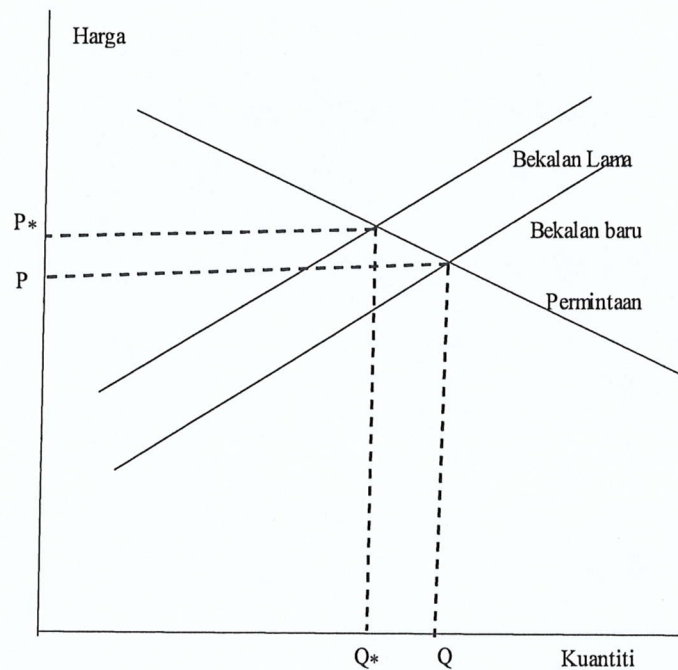
Tukarkan persamaan ini kepada persamaan beza. Selesaikan kedua-dua persamaan dan bandingkan penyelesaian. Bincangkan.

[11 markah]

3. Satu pulau boleh menampung beberapa spesis (tumbuhan dan haiwan) yang berada atasnya. Apakah kesan jarak pulau dari tanah besar ke atas bilangan spesis yang terdapat atas pulau tersebut? Jawapan anda mesti merujuk kepada lengkungan imigrasi dan kepupusan.

[6 markah]

4. Rajah berikut memperlihatkan bekalan dan permintaan satu komponen mikro prosesor.



Kita dapati bekalan menurun dan P adalah harga baru dengan Q kuantiti baru (juga permintaan baru). Dengan merujuk kepada jurutera dan proses penghasilan komponen, beri satu tafsiran kepada rajah di atas.

[10 markah]

5. Referring to the characteristic length, what do we mean when we say that two objects are geometrically similar to each other?

[4 marks]

6. We would like to construct a formula for the drag F_D on an airplane. Assume that this force is directly proportional to: i) cross-sectional area A of the plane, ii) velocity v of the plane and iii) the density ρ of the air. From dimensional analysis consideration, find a formula that relates F_D to A , v and ρ .

[11 marks]

7. Find the solution to the following equations together with the equilibrium value if one exists. Discuss the long-term behavior of the solution for the initial values given. Classify the equilibrium values as stable or unstable.

(i) $a_{n+1} = a_n + 3.2, a_0 = 1.3$ (ii) $a_{n+1} = -3a_n + 4, a_0 = 5$

[12 marks]

8. From a set of data $\{(w_i, r_i)\}$ that documented the pulse rate r and weight w of various mammals, we find that r is proportional to $w_i^{-\frac{1}{3}}$, i.e. $r = kw_i^{-\frac{1}{3}}$. Using the least square error formulation, show that the constant of proportionality is given by

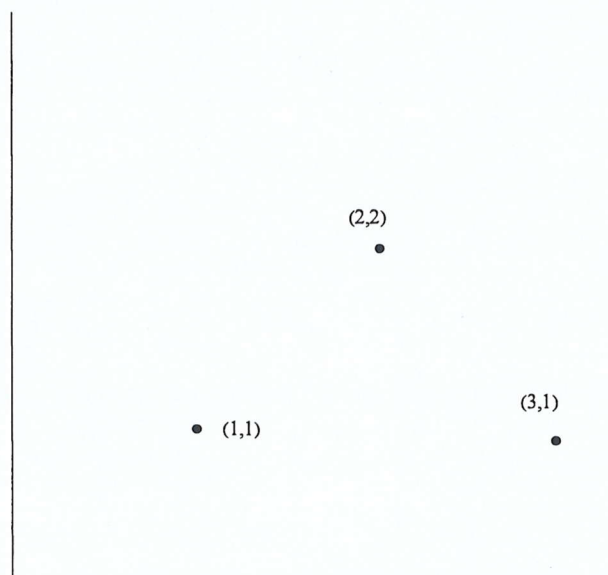
$$k = \frac{\sum_{i=1}^p r_i w_i^{-\frac{1}{3}}}{\sum_{i=1}^p w_i^{-\frac{2}{3}}}$$

[10 marks]

9. What are the disadvantages of using high degree polynomials for interpolation?

[5 marks]

10. You are given the following data points



5. Dengan merujuk kepada panjang cirian, apakah yang dimaksudkan apabila kita mengatakan dua objek adalah sama secara geometri?

[4 markah]

6. Kita ingin menghasilkan satu rumus untuk daya heretan F_D ke atas satu kapalterbang. Anggapkan bahawa daya ini berkadaran secara langsung dengan: i) luas rentas A kapalterbang, ii) halaju v kapalterbang dan iii) ketumpatan ρ udara. Dengan menggunakan analisis dimensi, dapatkan rumus tersebut yang mengkaitkan F_D dengan A , v dan ρ .

[11 markah]

7. Dapatkan penyelesaian kepada persamaan-persamaan berikut dan juga nilai keseimbangan (jika wujud). Bincangkan kelakuan jangka panjang penyelesaian untuk nilai awal yang diberi. Kelaskan nilai-nilai keseimbangan kepada stabil atau takstabil.

(i) $a_{n+1} = a_n + 3.2, a_0 = 1.3$

(ii) $a_{n+1} = -3a_n + 4, a_0 = 5$

[12 markah]

8. Satu set data $\{(w_i, r_i)\}$ memperihalkan kadar denyutan r dan berat w beberapa mamalia. Kita dapat bahawa r berkadaran dengan $w_i^{-\frac{1}{3}}$, iaitu $r = kw_i^{-\frac{1}{3}}$. Menggunakan kaedah ralat ganda dua terkecil, tunjukkan bahawa pemalar kadaran diberi oleh

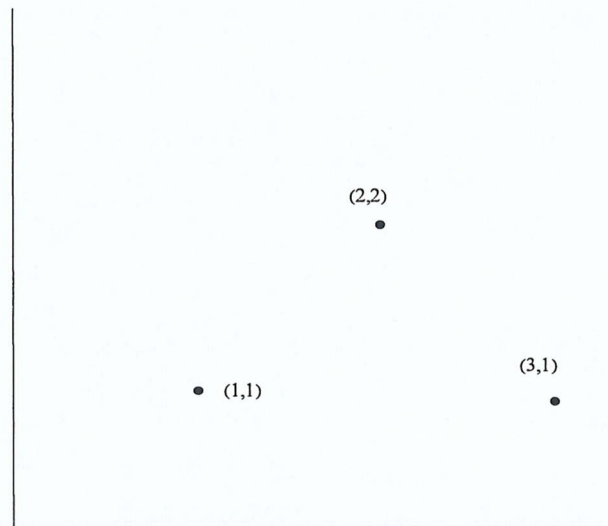
$$k = \frac{\sum_{i=1}^p r_i w_i^{-\frac{1}{3}}}{\sum_{i=1}^p w_i^{-\frac{2}{3}}}$$

[10 markah]

9. Apakah kelemahan-kelemahan dalam menggunakan polinom berdarjah tinggi untuk interpolasi?

[5 markah]

10. Anda diberi titik-titik data berikut



- (a) Find a unique polynomial that interpolates these points.
 (b) Interpolates these points using cubic splines.

[11 marks]

11. A community of N individuals was exposed to a certain infectious disease. At the onset of the disease, the community can be divided into three classes: the susceptible $S(t)$, the infected $I(t)$ and the removed $Z(t)$ that includes the immunized, dead and isolated. At the beginning, $I(t)$ and $Z(t)$ are small. A model describing the spread of the disease can be written as

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta S(0)I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(0)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dZ}{dt} &= \gamma I(t)\end{aligned}$$

Where β and γ are positive numbers that denotes rates of infection and removed.

- (i) Obtain solutions in terms of $S(0)$, $I(0)$ and $Z(0) = N - S(0) - I(0)$
 (ii) Show that if $\beta S(0) < \gamma$, this disease will not cause an epidemic
 (iii) What will happen if $\beta S(0) > \gamma$?

[14 marks]

12. The population expansion logistic model

$$x_{n+1} = rx_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$$

has a serious shortcoming. Assume r and k as model parameters.

- (i) What is the shortcoming?
 (ii) Can you think of a way of overcoming this problem? You are not required to write down the equation of an improved model. Just use words or explain using a graph.

[10 marks]

- (a) Dapatkan satu polinom unik melalui titik ini.
 (b) Dapatkan satu lengkungan melalui titik-titik ini menggunakan interpolasi splin kubik

[11 markah]

11. Satu komuniti N individu terdedah kepada satu penyakit berjangkit. Komuniti tersebut boleh dibahagikan kepada tiga kelas: mereka yang boleh dijangkiti $S(t)$, yang telah dijangkiti $I(t)$ dan mereka yang telah kebal, meninggal atau dipencilkan $Z(t)$. Pada permulaannya, $I(t)$ dan $Z(t)$ adalah kecil. Satu model yang memperlihatkan bagaimana penyakit merebak boleh ditulis seperti

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(0)I(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(0)I(t) - \gamma I(t)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \gamma I(t)$$

dengan β dan γ nombor-nombor positif

- (i) Dapatkan penyelesaian-penyelesaian dalam ungkapan-ungkapan $S(0)$, $I(0)$ dan $Z(0) = N - S(0) - I(0)$
 (ii) Tunjukkan bahawa jika $\beta S(0) < \gamma$, penyakit ini tidak akan menghasilkan epidemik
 (iii) Apakah akan berlaku jika $\beta S(0) > \gamma$?

[14 markah]

12. Model logistik perkembangan populasi

$$x_{n+1} = rx_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$$

ada satu kelemahan yang besar. Anggap r dan K sebagai parameter-parameter model.

- (i) Apakah kelemahan tersebut?
 (ii) Bolehkah anda fikirkan satu cara untuk mengatasi kelemahan tersebut? Anda tidak perlu menulis persamaan yang telah ditambah baik. Anda hanya perlu gunakan perkataan atau terangkan mengguna graf.

[10 markah]