

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang  
Sidang Akademik 2007/2008

Jun 2008

**MAT 111 – Linear Algebra**  
***[Aljabar Linear]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

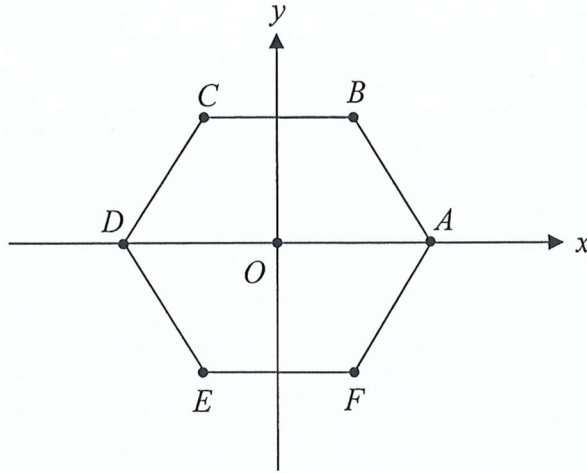
Please check that this examination paper consists of NINE pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all five** [5] questions.

**Arahan:** Jawab **semua lima** [5] soalan.]

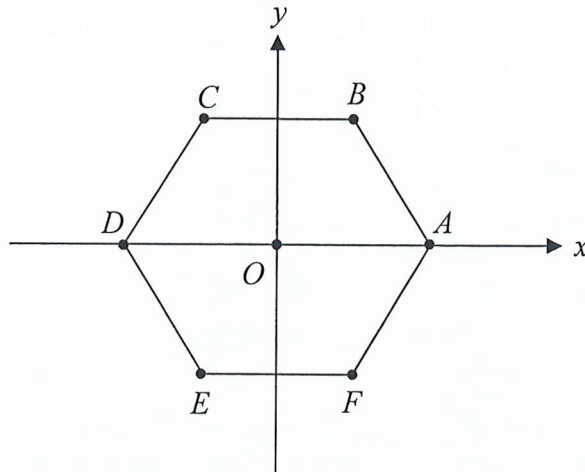
1. (a) In the figure below,  $A, B, C, D, E,$  and  $F$  are vertices of a regular hexagon centered at the origin. Express  $\overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FA}$  in terms of  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  where  $\mathbf{a} = \overline{OA}$  and  $\mathbf{b} = \overline{OB}$ .



- (b) (i) Given that vectors  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  are orthogonal when  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Prove that  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$  if and only if  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  are orthogonal.
- (ii) Compute the angle between the vectors  $\mathbf{u} = (2, 1, -2)$  and  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ .
- (c) (i) Find the volume of the parallelepiped determined by the vectors  $\mathbf{p} = (6, 3, -1)$ ,  $\mathbf{q} = (0, 1, 2)$  and  $\mathbf{r} = (4, -2, 5)$ .
- (ii) Use vectors to show that the area of a triangle determined by the points  $A(2, 2, 0)$ ,  $B(-1, 0, 2)$  and  $C(0, 4, 3)$  is  $\frac{15}{2}$  unit<sup>2</sup>.
- (d) (i) Determine the equation of the plane that passes through the point  $P(1, -2, 3)$  and the line with equation  $(x, y, z) = (2, 0, 1) + t(2, -4, 1)$ .
- (ii) Find the equation of the plane that contains the line  $x = -1 - 2t$ ,  $y = t$  and  $z = 5 + 3t$  and is perpendicular to the plane  $3x - y + 8z = 17$ .

[100 marks]

1. (a) Dalam gambarajah di bawah,  $A, B, C, D, E,$  dan  $F$  adalah bucu-bucu sebuah heksagon lazim yang berpusat di asalan. Ungkapkan  $\overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FA}$  dalam sebutan  $\mathbf{a}$  dan  $\mathbf{b}$  di mana  $\mathbf{a} = \overline{OA}$  dan  $\mathbf{b} = \overline{OB}$ .



- (b) (i) Diberi bahawa vektor-vektor  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  adalah berortogon bila  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ . Buktikan bahawa  $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$  jika dan hanya jika  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  adalah berortogon.
- (ii) Dapatkan sudut di antara vektor-vektor  $\mathbf{u} = (2, 1, -2)$  dan  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ .
- (c) (i) Cari isipadu paralelepiped yang ditentukan oleh vektor-vektor  $\mathbf{p} = (6, 3, -1)$ ,  $\mathbf{q} = (0, 1, 2)$  dan  $\mathbf{r} = (4, -2, 5)$ .
- (ii) Gunakan vektor untuk menunjukkan bahawa luas sebuah segitiga yang ditentukan oleh titik-titik  $A(2, 2, 0)$ ,  $B(-1, 0, 2)$  dan  $C(0, 4, 3)$  adalah  $\frac{15}{2}$  unit<sup>2</sup>.
- (d) (i) Tentukan persamaan satah yang melalui titik  $P(1, -2, 3)$  dan garislurus dengan persamaan  $(x, y, z) = (2, 0, 1) + t(2, -4, 1)$ .
- (ii) Cari persamaan satah yang mengandungi garislurus  $x = -1 - 2t$ ,  $y = t$  dan  $z = 5 + 3t$  dan beseranjang dengan satah  $3x - y + 8z = 17$ .

[100 markah]

2. (a) Prove that  $\mathbb{R}^3$  is generated by the set  $\{(0, 1, -2), (1, 1, 1), (1, -3, 2)\}$ .
- (b) Let  $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . Show that  $V$  with the usual operations on  $M_{2 \times 2}$  is a vector space over  $\mathbb{R}$ .
- (c) Let  $W = \{(x + y, 2x, -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ .
- Show that  $W$  is a subspace of  $\mathbb{R}^3$ .
  - Find the generating set  $S$  of  $W$ .
  - Explain why  $S$  cannot be a basis of  $\mathbb{R}^3$ .
  - Extend  $S$  so that we obtain a basis  $B$  of  $\mathbb{R}^3$  that contains  $S$ . Verify that  $B$  is indeed a basis of  $\mathbb{R}^3$ .
- (d) Show that if  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  is linearly independent and  $\mathbf{w}$  is not a linear combination of  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  then  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  is linearly independent.

[100 marks]

3. (a) Let  $U$  and  $W$  be subspaces of a finite-dimensional vector space  $V$ . Prove that:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

[Hint: Let  $B$  be a basis for  $U \cap W$ . Extend  $B$  to a basis  $C$  of  $U$  and a basis  $D$  of  $W$ . Show that  $C \cup D$  is a basis for  $U + W$ .]

- (b) Let  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  be a basis for a vector space  $V$ . Prove that  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n\}$  is also a basis for  $V$ .
- (c) (i) Show that  $\mathcal{L}((-1, -1, 1), (1, 1, 0)) = \mathcal{L}((-2, -2, 1), (0, 0, 1))$ .
- (ii) Let  $S$  be a subspace of a vector space  $V$ . Show that  $\mathcal{L}(S) = S$ .
- (d) Use the Gauss-Jordan method to find all solutions of the system of linear equations:

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & 10x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ -2x_1 & - & 8x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

[100 marks]

...5/-

2. (a) Buktikan bahawa  $\mathbb{R}^3$  dijana oleh set  $\{(0,1,-2), (1,1,1), (1,-3,2)\}$ .
- (b) Biar  $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . Tunjukkan bahawa  $V$  dengan operasi-operasi biasa dalam  $M_{2 \times 2}$  adalah suatu ruang vektor ke atas  $\mathbb{R}$ .
- (c) Biar  $W = \{(x+y, 2x, -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ .
- (i) Tunjukkan bahawa  $W$  adalah suatu subruang dari  $\mathbb{R}^3$ .
- (ii) Cari set penjana  $S$  bagi  $W$ .
- (iii) Terangkan mengapa  $S$  tidak boleh menjadi asas  $\mathbb{R}^3$ .
- (iv) Lanjutkan  $S$  supaya kita memperoleh suatu asas  $B$  bagi  $\mathbb{R}^3$  yang mengandungi  $S$ . Tentusahkan bahawa  $B$  memang suatu asas  $\mathbb{R}^3$ .
- (d) Tunjukkan bahawa jika  $\{u, v\}$  adalah tak bersandar linear dan  $w$  bukan gabungan linear  $u$  dan  $v$  maka  $\{u, v, w\}$  adalah tak bersandar linear.

[100 markah]

3. (a) Biar  $U$  dan  $W$  subruang-subruang suatu ruang vektor terhingga  $V$ . Buktikan bahawa:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

[Hint: Biar  $B$  sebagai suatu asas bagi  $U \cap W$ . Lanjutkan  $B$  kepada suatu asas  $C$  bagi  $U$  dan suatu asas  $D$  bagi  $W$ . Tunjukkan bahawa  $C \cup D$  adalah asas bagi  $U+W$ .]

- (b) Biar  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  sebagai suatu asas bagi suatu ruang vektor  $V$ . Buktikan bahawa  $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_n\}$  adalah suatu asas bagi  $V$  juga.
- (c) (i) Tunjukkan bahawa  $\mathcal{L}((-1, -1, 1), (1, 1, 0)) = \mathcal{L}((-2, -2, 1), (0, 0, 1))$ .
- (ii) Biar  $S$  sebagai subruang dari suatu ruang vektor  $V$ . Tunjukkan bahawa  $\mathcal{L}(S) = S$ .
- (d) Gunakan kaedah Gauss-Jordan untuk mencari semua penyelesaian bagi sistem persamaan:

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & & & 10x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ -2x_1 & - & 8x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

[100 markah]

...6/-

5. (a) Given the linear transformation  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  defined by

$$(a, b, c)T = (2a - b, a + b - 3c, -a + c)$$

- (i) Find a basis for the kernel of  $T$ .  
 (ii) Find a basis for the image of  $T$ .  
 (iii) Verify the dimension theorem using your answers in (i) and (ii).  
 (iv) Use the Gram-Schmidt process on your basis from (ii) to find an orthonormal basis for the image of  $T$ .
- (b) Find the parabola  $y = ax^2 + bx + c$  that best fits the data

$$\begin{array}{c|cccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 4 & 7 & 3 & 0 & -1 \end{array}.$$

- (c) Given  $U = \{(x, y, z) \mid x = t, y = -t, z = 2t, \text{ where } t \in \mathbb{R}\}$ . Find  $U^\perp$  (the orthogonal complement of  $U$ ).
- (d) Let  $\alpha = \{b_1, b_2, b_3\}$  and  $\beta = \{c_1, c_2, c_3\}$  two bases of  $\mathbb{R}^3$  and  $T$  is a linear transformation where  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Suppose that

$$c_1T = b_1 - 2b_2 + b_3 \quad c_2T = -b_2 + 3b_3 \quad c_3T = -2b_1 + b_3$$

- (i) Find the matrix  $T_{\beta, \alpha}$ .  
 (ii) Consider the vector  $v = c_1 - 2c_2 + 2c_3$ . Find  $(vT)_\alpha$  using (i).

[100 marks]

5. (a) Diberi transformasi linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  yang ditakrifkan dengan

$$(a, b, c)T = (2a - b, a + b - 3c, -a + c)$$

- (i) Cari suatu asas bagi kernel dari  $T$ .
- (ii) Cari suatu asas bagi imej dari  $T$ .
- (iii) Tentusahkan teorem dimensi menggunakan jawapan anda dalam (i) dan (ii).
- (iv) Guna proses Gram-Schmidt terhadap asas anda dalam (ii) untuk mencari asas ortonormal bagi imej  $T$ .

(b) Cari parabola  $y = ax^2 + bx + c$  yang merupakan padanan terbaik dengan data

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 4 & 7 & 3 & 0 & -1 \end{array}$$

(c) Diberi  $U = \{(x, y, z) \mid x = t, y = -t, z = 2t, \text{ where } t \in \mathbb{R}\}$ . Cari  $U^\perp$  (pelengkap berortogon bagi  $U$ ).

(d) Biar  $\alpha = \{b_1, b_2, b_3\}$  dan  $\beta = \{c_1, c_2, c_3\}$  adalah dua asas dari  $\mathbb{R}^3$  dan  $T$  adalah suatu transformasi linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Andai

$$c_1T = b_1 - 2b_2 + b_3 \quad c_2T = -b_2 + 3b_3 \quad c_3T = -2b_1 + b_3$$

- (i) Cari matriks  $T_{\beta, \alpha}$ .
- (ii) Pertimbangkan vektor  $v = c_1 - 2c_2 + 2c_3$ . Cari  $(vT)_\alpha$  menggunakan (i).

[100 markah]