
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2007/2008

April 2008

MAT 111 – Linear Algebra
[Aljabar Linear]

Duration : 3 hours

[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of NINE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all five** [5] questions.

[Arahan: Jawab **semua lima** [5] soalan.]

1. (a) Given a trapezium $ABCD$ with $AD \parallel BC$. If M and N are respectively the midpoints of AB and CD , show that $MN \parallel BC$ and $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.
- (b) (i) Show that $u = 2i - j + 4k$ and $v = 5i + 2j - 2k$ are orthogonal. Then, find a third vector w of magnitude 1, orthogonal to both u and v .
- (ii) Prove that $u \cdot v = \frac{1}{4}|u + v|^2 - \frac{1}{4}|u - v|^2$ for all vectors u and v in \mathbb{R}^n .
- (c) (i) Use vectors to determine the area of the triangle with vertices $P(1, -1, 1)$, $Q(2, 0, 3)$ and $R(1, 1, -3)$.
- (ii) Show that the volume of the parallelepiped determined by \bar{v} , \bar{w} and $\bar{v} \times \bar{w}$ is $|\bar{v} \times \bar{w}|^2$.
- (d) (i) Determine the parametric equation of the line through the points $(-1, 1, -1, 1)$ and $(1, 2, 3, 4)$.
- (ii) Determine the equation of the plane that passes through the point $P(0, -2, 5)$ and is parallel to the plane $6x - y + 2z = 3$.
- (iii) Find the point of intersection of the plane $x - 3y + 2z = 7$ and the line $(x, y, z) = (2, 0, -1) + t(4, -1, 2)$.

[100 marks]

2. (a) Let $P_2(\mathbb{R})$ denote the vector space of polynomials of degree less than or equal to 2. Prove that $P_2(\mathbb{R})$ is generated by the set $\{x - 2, x^2 + x + 1, x^2 - 3x + 2\}$.
- (b) Let $V = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Show that V with the operations:
- $$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
- $$k \odot (a, b) = (k^2 a, k^2 b)$$
- is not a vector space.
- (c) Let $W = \{(x, y, z) \mid x = 0 \text{ and } y + z = 0\}$.
- (i) Show that W is a subspace of \mathbb{R}^3 .
- (ii) Find the generating set S of W .
- (iii) Explain why S cannot be a basis of \mathbb{R}^3 .

1. (a) Diberi suatu trapezium $ABCD$ dengan $AD \parallel BC$. Jika M dan N ialah masing-masing titik-titik tengah bagi AB dan CD , tunjukkan bahawa $MN \parallel BC$ dan $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.
- (b) (i) Tunjukkan bahawa $u = 2i - j + 4k$ dan $v = 5i + 2j - 2k$ adalah berortogon. Kemudian, cari vektor ketiga w dengan magnitud 1, yang berortogon dengan kedua-dua u dan v .
- (ii) Buktikan bahawa $u \cdot v = \frac{1}{4}|u + v|^2 - \frac{1}{4}|u - v|^2$ untuk semua vektor u dan v in \mathbb{R}^n .
- (c) (i) Gunakan vektor untuk menentukan luas segitiga dengan bucu-bucu $P(1, -1, 1)$, $Q(2, 0, 3)$ dan $R(1, 1, -3)$.
- (ii) Tunjukkan bahawa isipadu paralelepiped yang ditentukan oleh \vec{v} , \vec{w} dan $\vec{v} \times \vec{w}$ adalah $|\vec{v} \times \vec{w}|^2$.
- (d) (i) Tentukan persamaan dalam bentuk berparameter bagi garislurus yang melalui titik-titik $(-1, 1, -1, 1)$ dan $(1, 2, 3, 4)$.
- (ii) Tentukan persamaan bagi satah yang melalui titik $P(0, -2, 5)$ dan selari dengan satah $6x - y + 2z = 3$.
- (iii) Cari titik persilangan bagi satah $x - 3y + 2z = 7$ dan garislurus $(x, y, z) = (2, 0, -1) + t(4, -1, 2)$.

[100 markah]

2. (a) Biar $P_2(\mathbb{R})$ menandakan ruang vektor bagi polinomial-polinomial berdarjah kurang dari atau sama dengan 2. Buktikan bahawa $P_2(\mathbb{R})$ dijana oleh set $\{x - 2, x^2 + x + 1, x^2 - 3x + 2\}$.
- (b) Biar $V = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Tunjukkan bahawa V dengan operasi-operasi:
- $$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
- $$k \odot (a, b) = (k^2 a, k^2 b)$$
- bukan suatu ruang vektor.
- (c) Biar $W = \{(x, y, z) \mid x = 0 \text{ dan } y + z = 0\}$.
- (i) Tunjukkan bahawa W ialah subruang dari \mathbb{R}^3 .
- (ii) Cari set penjana S untuk W .
- (iii) Terangkan mengapa S tidak boleh menjadi asas bagi \mathbb{R}^3 .

- (iv) Given that $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ is the standard basis of \mathbb{R}^3 .
Select among the vectors of B that can be added to S to form a basis B' of \mathbb{R}^3 .
- (v) Show that B' is a basis of \mathbb{R}^3 .
- (d) If u, v and w are linearly independent vectors, show that
- (i) $u + v, v - w$ and $2u + v$ are linearly independent also.
- (ii) $u + w, u + 2v + 3w$ and $-u + 2v + w$ are linearly dependent instead.

[100 marks]

3. (a) Let

$$U = \{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$V = \{(0, c, d, 0) \mid c, d \in \mathbb{R}\}$$

Find the basis and dimension of $U, V, U \cap V$ and $U + V$.

- (b) Let S and T be subspaces of some vector space V . Suppose that $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ is a set of linearly independent vectors in S and that $\{t_1, t_2, \dots, t_l\}$ is a set of linearly independent vectors in T . Prove that if $S \cap T = \{0\}$ then $\{s_1, s_2, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_l\}$ is a linearly independent set of vectors.
- (c) (i) State the definition for $\mathcal{L}(v_1, v_2)$, the linear span of two vectors v_1 and v_2 .
Show that

$$\mathcal{L}((1, 1, 1), (-1, -1, 1)) \subseteq \mathcal{L}((1, 1, 0), (0, 0, 1)).$$
- (ii) Let S be a subset of a vector space V . Show that if S is a subspace of V , then $\mathcal{L}(S) = S$.
- (d) Use the Gauss-Jordan method to find all solutions of the system of linear equations:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 - 9x_2 + 14x_3 - 17x_4 + 10x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2$$

[100 marks]

- (iv) Diberi $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ adalah asas piawai bagi \mathbb{R}^3 . Pilih di antara vektor-vektor dalam B yang boleh ditambah kepada S untuk menjadi asas B' bagi \mathbb{R}^3 .
- (v) Tunjukkan bahawa B' ialah asas bagi \mathbb{R}^3 .
- (d) Jika u, v dan w adalah vektor-vektor tak bersandar linear, tunjukkan bahawa
- (i) $u+v, v-w$ dan $2u+v$ adalah tak bersandar linear juga.
- (ii) $u+w, u+2v+3w$ dan $-u+2v+w$ adalah bersandar linear pula.

[100 markah]

3. (a) Biar

$$U = \{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$V = \{(0, c, d, 0) \mid c, d \in \mathbb{R}\}$$

Cari asas dan dimensi bagi $U, V, U \cap V$ dan $U+V$.

- (b) Biar S dan T sebagai subruang-subruang dari V . Andai $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ ialah set vektor-vektor yang tak bersandar linear dalam S dan $\{t_1, t_2, \dots, t_l\}$ ialah set vektor-vektor yang tak bersandar linear dalam T . Buktikan bahawa jika $S \cap T = \{\underline{0}\}$ maka $\{s_1, s_2, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_l\}$ ialah set vektor-vektor yang tak bersandar linear.
- (c) (i) Nyatakan takrif bagi $\mathcal{L}(v_1, v_2)$, rentangan linear dua vektor v_1 dan v_2 .
Tunjukkan bahawa

$$\mathcal{L}((1, 1, 1), (-1, -1, 1)) \subseteq \mathcal{L}((1, 1, 0), (0, 0, 1)).$$
- (ii) Biar S suatu subset dari ruang vektor V . Tunjukkan bahawa jika S ialah subruang dari V , maka $\mathcal{L}(S) = S$.
- (d) Gunakan kaedah Gauss-Jordan untuk mendapatkan semua penyelesaian bagi sistem persamaan linear:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 - 9x_2 + 14x_3 - 17x_4 + 10x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2$$

[100 markah]

4. (a) Suppose we have $T:V \rightarrow W$ and $S:V \rightarrow W$ where both T and S are linear transformations. Show that $T+S$ is also a linear transformation from V to W .
- (b) Let $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation defined by $(x, y, z)T = (-2x + y - z, x - 2y - z, -x - y - 2z)$. Find the standard matrix A that represents T such that $(v)T = vA$ for all $v \in \mathbb{R}^3$.
- (c) Find the dimension of the column space of A where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 8 \\ -1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- (d) Let the matrix B represent a linear transformation $T:V \rightarrow W$ and the matrix C represent a linear transformation $S:W \rightarrow U$. If $\rho(B)$ denotes the rank of B , show that $\rho(BC) \leq \rho(B)$.

[Hint: Use the fact that $\rho(BC) \leq \rho(C)$]

[100 marks]

5. (a) Given the linear transformation $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ defined by

$$(a, b, c)T = (a + 2b + c, 2a + 4b - 3c, a + 2b - c)$$

- (i) Find a basis for the kernel of T .
- (ii) Find a basis for the image of T .
- (iii) Verify the dimension theorem using your answers in (i) and (ii).
- (iv) Use the Gram-Schmidt process on your basis from (ii) to find an orthonormal basis for the image of T .
- (b) Find the parabola $y = ax^2 + bx + c$ that best fits the data

$$\begin{array}{c|cccc} x & -10 & 0 & 10 & 20 \\ \hline y & 110 & 0 & 95 & 400 \end{array}$$

- (c) Given $U = \{(x, y, 3x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Find U^\perp (the orthogonal complement of U).

4. (a) Andai kita mempunyai $T:V \rightarrow W$ dan $S:V \rightarrow W$ dengan kedua-dua T dan S adalah transformasi linear. Tunjukkan bahawa $T+S$ juga adalah suatu transformasi linear dari V ke W .
- (b) Biar $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sebagai transformasi linear dengan takrif $(x, y, z)T = (-2x + y - z, x - 2y - z, -x - y - 2z)$. Cari matrix piawai A yang mewakili T sedemikian hingga $(v)T = vA$ untuk semua $v \in \mathbb{R}^3$.
- (c) Cari dimensi bagi ruang lajur A dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 8 \\ -1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- (d) Biar matriks B mewakili suatu transformasi linear $T:V \rightarrow W$ dan matriks C mewakili suatu transformasi linear $S:W \rightarrow U$. Jika $\rho(B)$ menandakan pangkat B , tunjukkan bahawa $\rho(BC) \leq \rho(B)$.

[Petunjuk: Gunakan fakta bahawa $\rho(BC) \leq \rho(C)$]

[100 markah]

5. (a) Diberi transformasi linear $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tertakrif dengan

$$(a, b, c)T = (a + 2b + c, 2a + 4b - 3c, a + 2b - c)$$

- (i) Cari suatu asas bagi kernel dari T .
- (ii) Cari suatu asas bagi imej dari T .
- (iii) Tentusahkan teorem dimensi menggunakan jawapan anda dalam (i) dan (ii).
- (iv) Guna proses Gram-Schmidt terhadap asas yang diperoleh dalam (ii) untuk mencari suatu asas berortonormal bagi imej T .
- (b) Cari parabola $y = ax^2 + bx + c$ yang merupakan padanan terbaik dengan data
- | | | | | |
|-----|-----|---|----|-----|
| x | -10 | 0 | 10 | 20 |
| y | 110 | 0 | 95 | 400 |
- (c) Diberi $U = \{(x, y, 3x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Cari U^\perp (pelengkap berortogon bagi U).