
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2007/2008

April 2008

MAT 102 – *Advanced Calculus*
[Kalkulus Lanjutan]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all four** [4] questions.

[Arahan : Jawab **semua empat** [4] soalan.]

1. (a) Let

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (i) Show that f_x and f_y exist at $(0, 0)$.
- (ii) Show that $D_v f(0, 0)$ exists in all directions v .
- (iii) Show that f is discontinuous at $(0, 0)$.
- (b) Let $w = x^2 + y^2 + z^2$ and $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$.
- (i) Write w as a function of the variable t , then find $\frac{dw}{dt}$.
- (ii) By using the Chain Rule, find $\frac{dw}{dt}$ in terms of the variable t .
- (c) (i) Find the point where the local extremum of $f(x, y) = x^2 + xy + 3y^2$ occurs.
- (ii) Find the nearest point and the furthest point on the surface $z = xy + 1$ from the origin.

[100 marks]

2. (a) Evaluate the following integrals:

(i) $\iint_D (x + y) dx dy$, where D is the region on the xy -plane bounded by the line $y = x$ and the curve $y = x^2$.

(ii) $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.

- (b) Let D be the region on the xy -plane bounded by the parabola $y = 4 - x^2$ and the line $y = 3x$. Find the volume of the solid bounded above by the surface $z = x^2 + 4$ and below by the region D .

- (c) Check the convergence of the following improper integrals:

(i) $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} dx$

(ii) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^3} dx$

(iii) $\int_1^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$

[100 marks]

...3/-

1. (a) Andaikan

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (i) Tunjukkan bahawa f_x and f_y wujud pada $(0, 0)$.
 (ii) Tunjukkan bahawa $D_v f(0, 0)$ wujud dalam semua arah v .
 (iii) Tunjukkan bahawa f adalah tak selanjara pada $(0, 0)$.

(b) Andaikan $w = x^2 + y^2 + z^2$ dan $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$.

- (i) Tulis w sebagai suatu fungsi dalam pembolehubah t , kemudian cari $\frac{dw}{dt}$.
 (ii) Dengan menggunakan Petua Rantai, cari $\frac{dw}{dt}$ dalam sebutan t .

- (c) (i) Cari titik-titik berlakunya ekstremum tempatan untuk $f(x, y) = x^2 + xy + 3y^2$.
 (ii) Cari titik terdekat dan titik terjauh dari asalan pada permukaan $z = xy + 1$.

[100 markah]

2. (a) Nilaikan kamiran berikut:

(i) $\iint_D (x + y) \, dx \, dy$, D ialah rantau pada satah xy yang dibatasi oleh garis $y = x$ dan lengkung $y = x^2$.

(ii) $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$.

(b) Biar D rantau pada satah xy yang dibatasi oleh parabola $y = 4 - x^2$ dan garis $y = 3x$. Cari isipadu bongkah yang dibatasi dari atas oleh $z = x^2 + 4$ dan dari bawah oleh rantau D .

(c) Semak penumpuan kamiran tak wajar berikut:

(i) $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} \, dx$

(ii) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^3} \, dx$

(iii) $\int_1^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} \, dx$

[100 markah]

...4/-

3. (a) Find the following limits of sequences or functions:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (an + b)^{\frac{1}{n}}, \quad a, b > 0$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \ln \frac{x}{2x-1} \right)$

(n is a positive integer and x is a real number)

(b) Determine whether each of the following series converges:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3+k} \right)^k$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin \left(\frac{1}{k} \right)$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 7}{k\sqrt{k^2 + 8}}$

(c) (i) Suppose that $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converges and $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverges. Prove that

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) \text{ diverges.}$$

(ii) Hence determine whether $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - 4^k}{k4^k}$ converges or diverges.

[100 marks]

3. (a) Cari had untuk jujukan atau fungsi berikut:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (an + b)^{\frac{1}{n}}, a, b > 0$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \ln \frac{x}{2x-1} \right)$

(n ialah integer positif dan x ialah nombor nyata)

(b) Tentukan samada siri berikut menumpu:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3+k} \right)^k$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin \left(\frac{1}{k} \right)$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 7}{k\sqrt{k^2 + 8}}$

(c) (i) Andaikan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ menumpu dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mencapah. Buktikan bahawa

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) \text{ mencapah.}$$

(ii) Dengan itu tentukan samada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - 4^k}{k4^k}$ menumpu atau mencapah.

[100 markah]

4. (a) Jujukan $\{a_n\}$ ditakrif sebagai $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$, $\forall n \geq 1$.

(i) Tunjukkan bahawa $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Dengan itu tentukan samada jujukan $\{a_n\}$ adalah menumpu atau mencapah.

(ii) Adakah $\{a_n\}$ terbatas?

(iii) Adakah $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ wujud? Beri alasan anda.

(b) Andaikan $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

Tunjukkan bahawa siri Taylor untuk f di sekitar 1 ialah

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$ dan cari selang penumpuannya.

(c) (i) Buktikan bahawa jika $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, maka $\alpha \geq 0$.

(ii) Dengan itu tunjukkan bahawa jika $b_n \geq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \delta$, maka $\beta \geq \delta$.

[100 markah]