
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2007/2008

Jun 2008

MAT 101 – Calculus
[Kalkulus]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

Arahan: Jawab **semua empat** [4] soalan.]

1. (a) Find the following limit:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6}$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)\sin(4x)}{x}$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(b) Prove by using the definition of limit that $\lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 3$.

- (c) (i) Show that if f is a differentiable function at $x = a$, then f is continuous at $x = a$.
- (ii) Show that the converse statement in (i) is not true, namely give an example of a function f that is continuous at $x = a$ but not differentiable at $x = a$.

[100 marks]

2. (a) (i) Write the statement of the Intermediate Value Theorem.
- (ii) Show that there is a root of $\sin x = 1 - x$ in the interval $(0, 1)$.

- (b) (i) Write the statement of the Mean Value Theorem.
- (ii) Prove the inequality $|\sin u - \sin v| \leq |u - v|$ for all real u and v .

- (c) For $f(x) = \begin{cases} cx + 1, & \text{if } x \leq 3 \\ cx^2 - 1, & \text{if } x > 3 \end{cases}$, find the value of the constant c such that f is continuous on $(-\infty, \infty)$

[100 marks]

3. (a) Find the extremum of $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ on the interval $[0, 6]$.

(b) Consider the function $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$, $x \neq 1$.

- (i) Find the critical number for f .
- (ii) Find the interval(s) on which f is increasing and the interval(s) on which f is decreasing.
- (iii) Find, if any, the local extremum of f .
- (iv) Find all the asymptotes of f .

[100 marks]

1. (a) Cari had berikut:

(i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)\sin(4x)}{x}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(b) Bukti dengan menggunakan takrif had bahawa $\lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 3$.

(c) (i) Tunjukkan bahawa jika f fungsi terbezakan pada $x = a$, maka f adalah selanjar pada $x = a$.

(ii) Tunjukkan bahawa pernyataan akas dalam (i) tidak benar, iaitu beri satu contoh fungsi yang selanjar pada $x = a$ tetapi tidak terbezakan pada $x = a$.

[100 markah]

2. (a) (i) Tulis pernyataan untuk Teorem Nilai Pertengahan.

(ii) Tunjukkan bahawa terdapat suatu punca untuk $\sin x = 1 - x$ dalam selang $(0, 1)$.

(b) (i) Tulis pernyataan untuk Teorem Nilai Min.

(ii) Tunjukkan ketaksamaan $|\sin u - \sin v| \leq |u - v|$ untuk semua nilai nyata u dan v .

(c) Untuk $f(x) = \begin{cases} cx + 1, & \text{if } x \leq 3 \\ cx^2 - 1, & \text{if } x > 3 \end{cases}$, cari nilai pemalar c supaya f adalah selanjar pada $(-\infty, \infty)$

[100 markah]

3. (a) Cari ekstremum untuk $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ pada selang $[0, 6]$.

(b) Pertimbangkan fungsi $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$, $x \neq 1$.

(i) Cari nombor genting untuk f .

(ii) Cari selang berlakunya f menokok and selang berlakunya f menyusut.

(iii) Cari, jika ada, ekstremum tempatan untuk f .

(iv) Cari semua asimptot untuk f .

[100 markah]