

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
Academic Session 2007/2008

April 2008

**MAA 111 – Algebra for Science Students**  
***[Aljabar untuk Pelajar Sains]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions** : Answer **all twenty** [20] questions.

**[Arahan** : Jawab **semua dua puluh** [20] soalan.]

1. If  $A$  is an  $n \times n$  matrix and  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  has exactly one solution for every  $\mathbf{b}$ , what can you say about the matrix  $A$ ?  
[2 marks]
2. Suppose the null space of a  $m \times n$  matrix  $A$  contains only the zero vector. What can you say about solutions to  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ?  
[2 marks]
3. What does it mean for a subset  $V$  of  $\mathbb{R}^n$  to be a subspace?  
[2 marks]
4. What does it mean for a subset  $S$  of  $\mathbb{R}^n$  to be linearly independent?  
[2 marks]
5. What is the meaning of basis and dimension of a subspace  $V$  of  $\mathbb{R}^n$ .  
[2 marks]
6. If  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  then the vector  $\mathbf{b}$  is a linear combination of what vectors from the matrix  $A$ ? And so  $\mathbf{b}$  lies in which space of matrix  $A$ ?  
[2 marks]
7. State the definitions of rank ( $A$ ) and nullity ( $A$ ) of a matrix  $A$ .  
[2 marks]
8. If  $A$  is a matrix with  $n$  columns, write the most important formula which relates rank( $A$ ) and nullity ( $A$ ).  
[2 marks]
9. The least square solution to  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  minimizes what error function?  
[2 marks]
10. What is the connection between the least square solution of  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  and the idea of projection onto the column space?  
[2 marks]
11. State the definitions of an eigenvalue and an eigenvector of a matrix  $A$ .  
[2 marks]
12. Write what it means by the statement that “a matrix can be diagonalized (or diagonalizable)”  
[2 marks]
13. True/False :
  - (a)  $\det(A + b) = \det A + \det B$  for any two  $n \times n$  matrices  $A$  and  $B$ .
  - (b) The span of any set of  $n$  vectors is  $n$  –dimensional.
  - (c) If an  $n \times n$  matrix  $A$  has  $n$  linearly independent eigenvectors then  $A$  is diagonalizable.[6 marks]

1. Jika  $A$  matriks  $n \times n$  dan  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mempunyai tepat satu penyelesaian untuk setiap  $\mathbf{b}$ , apa anda boleh katakana tentang matriks  $A$ ?  
[2 markah]
2. Andaikan ruang nul untuk matriks  $A$  mempunyai hanya vektor sifar. Apa anda boleh katakan tentang penyelesaian  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ?  
[2 markah]
3. Apakah maksud suatu subset  $V$  dalam  $\mathbb{R}^n$  adalah subruang?  
[2 markah]
4. Apakah maksud suatu subset  $S$  dalam  $\mathbb{R}^n$  adalah bersandar linear?  
[2 markah]
5. Apakah maksud asas dan dimensi suatu subruang  $V$  dalam  $\mathbb{R}^n$ .  
[2 markah]
6. Jika  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  maka vektor  $\mathbf{b}$  adalah gabungan linear vektor-vektor apa dari matriks  $A$ ? Jadi  $\mathbf{b}$  terletak di dalam ruang apa daripada matriks  $A$ .  
[2 markah]
7. Nyatakan takrif untuk pangkat  $(A)$  dan nuliti  $(A)$  untuk suatu matriks  $A$ .  
[2 markah]
8. Jika  $A$  ialah matriks dengan  $n$  lajur, tuliskan rumus penting yang mengaitkan pangkat  $(A)$  dengan nuliti  $(A)$ .  
[2 markah]
9. Penyelesaiakan kuasadua terkecil untuk  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  meminimumkan fungsi ralat apa?  
[2 markah]
10. Apakah kaitan dia antara penyelesaian kuasadua terkecil untuk  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dengan idea unjuran ke atas ruang lajur?  
[2 markah]
11. Nyatakan takrif untuk nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks  $A$ .  
[2 markah]
12. Tuliskan maksud pernyataan "suatu matriks boleh diperpenjuran/terpenjuran"  
[2 markah]
13. Betul/Salah :  
 (a)  $\det(A + b) = \det A + \det B$  untuk sebarang dua matriks  $n \times n$   $A$  dan  $B$ .  
 (b) rentang sebarang set untuk  $n$  vektor adalah  $n$ -dimensional.  
 (c) Jika suatu matriks  $n \times n$   $A$  mempunyai  $n$  vektor eigen tak bersandar linear, maka  $A$  terpenjuran.  
 [6 markah]

14. For which values of  $k$  will the following linear system have no solutions? Exactly one solution? Infinitely many solutions?

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\x_3 &= 2 \\(k^2 - 4)x_3 &= k - 2\end{aligned}$$

[10 marks]

15. Let  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  be a linear transformation such that  $T(1,1,1,1) = (5,1,-3)$  and  $T(-1,1,0,2) = (2,0,1)$ . Find  $T(5,-1,2,-4)$ .

[10 marks]

16. Find the rank and the nullity of  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

[10 marks]

17. Let  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

- (a) Compute the eigenvalues and eigenvectors of  $A$ .  
(b) Is the matrix  $A$  diagonalizable? If so, diagonalize  $A$ .

[10 marks]

18. Let  $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,-1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1,0,1,2)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-1,0,1,0)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (-1,3,-1,1)$ . Expand the vector  $\mathbf{x} = (1,2,3,4)$  as a linear combination of  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_3$ , and  $\mathbf{v}_4$ .

[10 marks]

19. Find the linear function which best fits the given data in the sense of least squares.

$x$	0	1	2	3	4	5
$y$	0	1	4	9	16	25

[10 marks]

20. Three industries  $A, B$  and  $C$  are such that all the output of  $A$  is used by  $B$  all the output of  $B$  is used by  $C$ , and all the output of  $C$  is used by  $A$ . Assuming that there is no product is exported or imported, find the equilibrium price structure.

[10 marks]

14. Apakah nilai  $k$  sedemikian system linear berikut tidak mempunyai penyelesaian? Tepat satu penyelesaian? Tak terhingga banyak penyelesaian?

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\x_3 &= 2 \\(k^2 - 4)x_3 &= k - 2\end{aligned}$$

[10 markah]

15. Andaikan  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  suatu transformasi linear sedemikian  $T(1,1,1,1) = (5,1,-3)$  dan  $T(-1,1,0,2) = (2,0,1)$ . Cari  $T(5,-1,2,-4)$ .

[10 markah]

16. Cari pangkat dan nuliti untuk  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

[10 markah]

17. Andaikan  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

- (a) Kira nilai eigen dan vektor eigen untuk  $A$ .  
(b) Adakah matriks  $A$  terperpenjuran? Jika ya, perpenjuran  $A$ .

[10 markah]

18. Andaikan  $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,-1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1,0,1,2)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-1,0,1,0)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (-1,3,-1,1)$ . Kembangkan vektor  $\mathbf{x} = (1,2,3,4)$  sebagai suatu gabungan linear daripada  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_3$ , dan  $\mathbf{v}_4$ .

[10 markah]

19. Cari fungsi linear yang paling padan data berikut dari segi kuasadua terkecil.

$x$	0	1	2	3	4	5
$y$	0	1	4	9	16	25

[10 markah]

20. Tiga industri  $A, B$  dan  $C$  adalah sedemikian semua output  $A$  digunakan oleh  $B$ , semua output  $B$  digunakan oleh  $C$ , dan semua output  $C$  digunakan oleh  $A$ . Dengan andaian tiada barangan dieksport atau diimport, cari keseimbangan struktur harga.

[10 markah]