

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1995/96

Mei/Jun 1996

IIM 413 - Persamaan Pembezaan II

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
 - Jawab mana-mana **LIMA** soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
 - Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
 - Alat pengira elektronik tak berprogram boleh digunakan.
-

1. Andaikan persamaan pembezaan biasa

$$(1 + x^2)y'' + y = 0$$

mempunyai penyelesaian dalam bentuk

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(a) Tunjukkan bahawa

$$(n + 2)(n + 1) a_{n+2} + (n^2 - n + 1) a_n = 0, \\ n = 2, 3, 4, \dots$$

(35 markah)

(b) Jika $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 2$, cari penyelesaian khusus bagi persamaan pembezaan ini dalam bentuk siri sehingga sebutan yang melibatkan x^5 .

(35 markah)

(c) Gunakan ujian nisbah untuk menentukan jejari ketumpuan bagi siri penyelesaian persamaan pembezaan ini. Terangkan bagaimana anda dapat menentukan jejari ketumpuan secara terus dari persamaan pembezaan yang diberi.

(30 markah)

2. Fungsi janaan untuk set fungsi Bessel

$$\{ J_n(x) \}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

diberi oleh

$$\exp\left(\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n.$$

Gunakan hubungan ini untuk menunjukkan bahawa

$$(i) J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

$$(ii) J_n(0) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

di mana n adalah integer.

(100 markah)

3. Pertimbangkan masalah Sturm-Liouville sekata

$$(xy')' + \lambda^2 \left(\frac{1}{x}\right)y = 0, \quad 1 < x < 2$$

$$y(1) = 0$$

$$y(2) = 0.$$

(a) Tunjukkan bahawa

$$y(x) = A \cos(\lambda \ln x) + B \sin(\lambda \ln x)$$

adalah penyelesaian am bagi persamaan pembezaan.

(b) Cari nilai eigen dan fungsi eigen bagi masalah nilai sempadan yang diberi.

(c) Cari kembangan siri bagi fungsi

$$f(x) = x$$

dalam sebutan fungsi eigen.

Apakah nilai bagi penumpuan siri dititik di $x = 1$ dan $x = 2$?

(100 markah)

4. (a) Huraikan pengertian adjoin dan swa-adjoin bagi persamaan pembezaan

$$p(x) y'' + q(x) y' + r(x) y = F(x).$$

(30 markah)

(b) Diberi persamaan pembezaan

$$xy'' + 2y' + xy = 0.$$

(i) Cari adjoin persamaan pembezaan ini.

(ii) Dengan menentukan penyelesaian bagi persamaan adjoin ini, selesaikan persamaan pembezaan yang diberi.

(70 markah)

5. (a) Diberi persamaan tak linear

$$\frac{dx}{dt} = x^2(x^2 - 1)$$

$$x(0) = x_0, \quad -\infty < x_0 < \infty$$

Tentukan titik-titik genting bagi persamaan pembezaan tersebut dan bincangkan kestabilan setiap penyelesaian keseimbangannya. Lakarkan graf x lawan t .

(50 markah)

- (b) Cari nilai eigen bagi sistem persamaan pembezaan linear

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 5y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 2y$$

Seterusnya, nyatakan jenis titik genting (0, 0) bagi sistem tersebut dan tentukan kestabilannya.

(50 markah)

6. Diberi masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = 1 + (y - x)^2$$

$$y(0) = 0.5 \tag{I}$$

- (a) Dengan menggunakan penggantian $y = x + z$, tunjukkan bahawa masalah nilai awal tersebut dapat diturunkan kepada

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$z(0) = 0.5 \tag{II}$$

Selesaikan masalah nilai awal (II) dan dengan itu tunjukkan penyelesaian tepat bagi masalah (II) ialah

$$y(x) = x + \frac{1}{(2-x)}$$

(50 markah)

- (b) Gunakan kaedah Euler untuk mendapatkan penyelesaian hampiran bagi masalah nilai awal (I) di titik-titik $x_1 = \frac{1}{N}$, $x_2 = \frac{2}{N}$, ..., $x_N = 1$ dengan $N = 10$. Bandingkan penyelesaian hampiran dengan penyelesaian tepat dalam (a) dan dapatkan ralat penyelesaian di titik $x = 1$ sehingga tiga titik perpuluhan.

(50 markah)