UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan

Sidang Akademik 1995/96

Mei/Jun 1996

JIM 314 - Pengantar Analisis Berangka

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira elektronik tak berprogram boleh digunakan.

...2/-

1. (a) Lakarkan graf bagi fungsi f yang diberi oleh $f(x) = 2x^2e^{-x}$.

(10 markah)

(b) Dengan menggunakan kaedah separuh selang dapatkan punca-punca persamaan

$$2x^2e^{-x} = 1$$

jitu sehingga 1 tempat perpuluhan.

(25 markah)

(c) Untuk setiap punca-punca di atas, tuliskan skema lelaran titik tetap, $x_{k+1} = g(x_k)$, yang akan menumpu ke punca yang berkenaan.

(25 markah)

(d) Dalam setiap kes (c) anggarkan bilangan lelaran yang diperlukan untuk memperolehi punca jitu ke 10 tempat perpuluhan.

(20 markah)

(e) Tuliskan suatu algoritma untuk mendapatkan punca bagi persamaan di dalam (b) dengan kaedah Newton-Raphson.

(20 markah)

2. (a) (i) Diberi matriks (n x n), $A = [a_{ij}]$. Jika $A = LU$ di mana

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & & \vdots & \vdots \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

dapatkan persamaan-persamaan yang dipenuhi oleh unsur-unsur L dan U.

(ii) Tuliskan suatu algoritma bagi menjalankan huraian di atas.

(60 markah)

...3/-

(b) Dengan menggunakan kaedah penghuraian di dalam (a), huraikan A supaya A = LU di mana

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Seterusnya dapatkan penentu bagi matriks A.

(40 markah)

3. (a) Dalam jadual berikut yang terdiri daripada nilai-nilai fungsi Bessel peringkat sifar, $J_o(x)$, beberapa pemasukan mengandungi kesilapan. Bina suatu jadualbeza untuk mendapat pemasukan-pemasukan yang salah ini. Tuliskan pemasukan yang sepatutnya.

x_o	$J_o(x)$
0.0	1.00000 00000
0.1	0.99750 15620
0.2	0.99002 49752
0.3	0.97962 62465
0.4	0.96038 82266
0.5	0.93846 98072
0.6	0.91200 48634

(30 markah)

(b) Binakan jadual beza bagi data berikut:

x	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50
f(x)	0.1823	0.2231	0.2624	0.3001	0.3350	0.3716	0.4055

...4/-

(i) Gunakan kaedah Interpolasi Beza Depan Newton-Gregory darjah 3 untuk menilaikan f(1.37). Pilih titik terbaik bagi x_o. Anggarkan ralat yang terlibat.

(ii) Ulangi soalan (i) tetapi untuk menilaikan f(0.77).

(iii) Bandingkan ralat dalam (i) dan (ii). Apakah yang anda dapat simpulkan daripada ralat-ralat ini?

(70 markah)

4. (a) Tunjukkan bahawa

$$\sum_{k=0}^{n} L_k(x) = 1$$

di mana Lk (x) ialah fungsi Lagrange.

(20 markah)

(b) Jika

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

tunjukkan bahawa

$$\Delta^n f(x) = a_n h^n n!$$

di mana $h = x_{i+1} - x_i$ dan Δ^n ialah operasi beza ke depan peringkat n.

(35 markah)

(c) Nilai $e^{0.24}$ dianggarkan melalui interpolasi Lagrange dengan menggunakan maklumat $e^0 = 1$, $e^{0.1} = 1.1052$, $e^{0.2} = 1.2214$ dan $e^{0.3} = 1.3499$. Cari anggaran ralat maksimum dan minimum. Bandingkan dengan ralat sebenar.

(45 markah)

...5/-

5. (a) Binakan jadual untuk $f(x) = 2 + \log_{10} x$ pada nilai-nilai $x = 0.25$ sehingga 0.41 dengan saiz langkah $h = 0.02$.
Anggarkan terbitan bagi $f(x)$ di $x = 0.33$ dengan menggunakan rumus yang diperolehi melalui pembezaan rumus interpolasi Newton-Gregory. Gunakan 1, 2 dan 3 sebutan daripada rumus berkenaan.
Anggarkan ralat-ralat yang terlibat.

(50 markah)

(b) Nilaikan kamiran

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

dengan menggunakan petua trapezium.
Gunakan 5 subselang dan anggarkan ralat yang terlibat. Anggarkan bilangan subselang yang diperlukan jika diingini $|\text{ralat}| \le 10^{-6}$.

(50 markah)

6. (a) Pertimbangkan sistem persamaan linear

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_{21} \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

(i) Kira sisa yang berkaitan dengan penyelesaian hampiran $\underline{x} = (6.0, -7.2, 2.9, -0.1)^T$.

(ii) Diberi bahawa penyelesaian tepat ialah $\underline{x} = (1.0, 1.0, 1.0, 1.0)^T$, apakah yang dapat disimpulkan daripada jawapan anda dalam (a) tentang matriks koefisien bagi sistem yang diberi?

(iii) Hitung suatu batas di bawah bagi nombor suasana untuk matriks koefisien yang diberi. Anda boleh gunakan sebarang norma rektor.

(50 markah)

...6/-

(b) Skema kaedah SOR bagi menyelesaikan sistempersamaan linear $A\underline{x} = \underline{b}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, diberi oleh

$$\underline{x}^{(k+1)} = (D + \omega L)^{-1} [(1-\omega)D - \omega U]\underline{x}^{(k)} + \omega(D + \omega L)^{-1} \underline{b},$$

di mana $A = L + D + U$ (L matriks segitiga bawah tegas, D matriks pepenjuru dan U matriks segitiga atas tegas) dan ω ialah suatu parameter yang perlu ditentukan supaya memberikan kadar penumpuan yang terpantas. Jika diberi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

dapatkan nilai optimum ω.

[Panduan: Anda boleh gunakan sifat-sifat berikut tanpa bukti:

Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

mempunyai nilaieigen λ_1 dan λ_2, maka

I. $|A| = \lambda_1\lambda_2$

II. $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$]

(50 markah)

- oooOooo -