

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang Akademik 2000/2001

Februari/Mac 2001

**SEP222 - Matematik Untuk Ahli-Ahli Ekonomi**

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEPULUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab LIMA (5) soalan sahaja. Soalan No. 1, 2 dan 3 daripada Bahagian A adalah wajib dijawab. Jawab mana-mana DUA (2) soalan daripada Bahagian B.

BAHAGIAN A (60 markah)

Jawab SEMUA soalan.

1. Dapatkan terbitan pertama bagi fungsi-fungsi berikut:

(a)  $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)^3$

(b)  $y = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

(c)  $y = 20 - 4 \ln \frac{x^3}{x^2 - 2}$

(d)  $y = \log_a(x^2 + 5)^2$

(e)  $y = e^{x^3 \ln x}$

(f)  $-x^2 + x^3y - y^2 = 0$

(18 markah)

2. Kirakan kamiran-kamiran berikut:

(a)  $\int \frac{x^2}{(4x^3 + 7)^2} dx$

(b)  $\int 6x e^{x+7} dx$

(c)  $\int \frac{1}{(16x^2 - 25)} dx$

(d)  $\int_1^4 (x^{-1/2} + 3x^{1/2}) dx$

(12 markah)

3. (a) Carikan pembeza berperingkat kedua bagi fungsi:

$$u = e^x + e^y + 2xy + \ln(1 + y)$$

(b) Diberikan fungsi utiliti seperti berikut:

$$u = (x^2y)^{1/3}$$

di mana  $u$ ,  $x$  dan  $y$  adalah paras utiliti, barang  $X$  dan barang  $Y$  masing-masing.

(i) Adakah fungsi utiliti itu satu fungsi homogen? Jika ya, apakah peringkat homogen itu?

(ii) Adakah fungsi utiliti marginal bagi  $X$  dan utiliti marginal bagi  $Y$  fungsi homogen? Jika ya, apakah peringkat homogen bagi kedua-dua fungsi itu?

(c) Untuk fungsi permintaan  $p = 8.25e^{-0.02Q}$ ,

(i) carikan keanjalan harga permintaan,

(ii) carikan paras  $Q$  yang memaksimumkan jumlah hasil.

(d) Carikan  $x$  dan  $y$  yang meminimumkan fungsi

$$z = 3x^2 + 2y^2 - xy - 4x - 7y + 12$$

(e) Katakan bahawa sebuah firma elektronik mempunyai fungsi pengeluaran  $Q = K^{0.3}L^{0.5}$  di mana  $Q$ ,  $K$  dan  $L$  adalah paras output, modal and buruh masing-masing. Fungsi isokos firma itu adalah  $6K + 2L = 384$ . Berapakah modal dan buruh firma harus menggunakan supaya memaksimumkan outputnya?



- (f) (i) Fungsi hasil marginal adalah  $MR = 60 - 2Q - 2Q^2$ . Carikan (a) fungsi jumlah hasil TR, dan (b) fungsi permintaan dalam bentuk  $P = f(Q)$ .
- (ii) Diberikan kecenderungan menabung sut (mps) adalah  $dS/dY = 0.5 - 0.2Y^{-1/2}$ . Tabungan (S) adalah -3.5 apabila pendapatan (Y) adalah 25. Carikan fungsi tabungan.

(30 markah)

**BAHAGIAN B** (40 markah)Jawab DUA (2) soalan sahaja.

4. (a) Tunjukkan bahawa hasil marginal (MR) dan keanjalan harga ( $E_d$ ) mempunyai perkaitan seperti berikut:

$$MR = P \left(1 + \frac{1}{E_d}\right)$$

di mana P adalah harga.

(6 markah)

- (b) Katakan seorang pengguna yang mempunyai fungsi utiliti  $u = 50x^{1/3}y^{2/3}$  ingin membelanjakan sebanyak RM M ke atas barangan X dan Y. Harga X dan Y adalah  $P_x$  dan  $P_y$  masing-masing.

- (i) Terbitkan fungsi-fungsi permintaan untuk barangan X dan Y.
- (ii) Sekiranya  $M = RM72$ ,  $P_x = RM4$  dan  $P_y = RM6$ , berapakah X dan Y yang pengguna harus membeli supaya memaksimumkan utilitinya? Tunjukkan bahawa syarat cukup dipenuhi.
- (iii) Hitungkan keanjalan permintaan pendapatan terhadap barangan X. Jika belanjawan pengguna meningkat sebanyak 50%, apakah paras penggunaan barangan X?

(14 markah)

5. (a) Diberikan fungsi pengeluaran:

$$Q = aL - bK + cL^dK^{1-d}$$

di mana Q, L dan K adalah output, buruh dan modal masing-masing, manakala a, b, c dan d adalah pemalar.

- (i) Tunjukkan bahawa Teorem Euler wujud.
- (ii) Adakah fungsi produk marginal buruh satu fungsi homogen?

(8 markah)



- (b) Syarikat Maxis menghadapi dua fungsi permintaan berlainan yang berikut terhadap perkhidmatannya.

Hari Kerja:  $Q_1 = 24 - 0.2P_1$

Hari Cuti:  $Q_2 = 10 - 0.05P_2$

Fungsi kos adalah  $TC = 35 + 40Q$  di mana  $Q = Q_1 + Q_2$  (dalam juta unit).

- (i) Sekiranya Syarikat Maxis mengamalkan diskriminasi harga, apakah harga dan kuantiti di dalam setiap pasaran yang akan memaksimumkan keuntungannya? Berapakah keuntungan maksimum itu?
- (ii) Sekiranya Syarikat Maxis tidak mengamalkan diskriminasi harga, apakah harga dan kuantiti yang akan memaksimumkan keuntungannya? Berapakah keuntungan maksimum itu?

(12 markah)

6. (a) Fungsi permintaan dalam pasaran berpersaingan sempurna adalah  $P = 113 - Q^2$  manakala fungsi penawaran adalah  $P = (Q + 1)^2$ .

Hitungkan lebihan pengguna dan lebihan pengeluar pada keseimbangan pasaran itu. Lukiskan rajah untuk menjelaskan jawapan anda.

(8 markah)

- (b) Katakan seorang pemonopoli menghadapi fungsi permintaan  $p + 3q - 300 = 0$ . Fungsi kos puratanya adalah  $AC = 2q + 10$ .

- (i) Hitungkan kuantiti dan harga yang memaksimumkan keuntungan pemonopoli itu. Berapakah keuntungan maksimumnya?
- (ii) Sekiranya kerajaan mengenakan satu cukai jualan sebanyak RM10 seunit jualan, hitungkan kuantiti dan harga yang memaksimumkan keuntungan pemonopoli itu. Berapakah keuntungan maksimumnya?
- (iii) Andaikan sekarang kerajaan ingin memaksimumkan hasil cukai daripada cukai jualan itu. Hitungkan kadar cukai jualan yang kerajaan harus menetapkan supaya mendapat hasil cukai maksimum.

(12 markah)

7. (a) Andaikan keluk produk purata buruh (AP) dan keluk produk marginal buruh (MP) berbentuk huruf U songsang.  $AP = Q/L$  di mana Q adalah output dan L adalah input buruh.

Tunjukkan bahawa:

- (i) Apabila AP menurun, MP kurang daripada AP.
- (ii) Apabila AP mencapai maksimum,  $MP = AP$ .
- (iii) Apabila AP meningkat, MP melebihi AP.

Lukiskan satu rajah untuk menjelaskan jawapan anda.

(8 markah)

- (b) Diberikan model makroekonomi seperti berikut:

$$Y = C + I_0 + G_0$$

$$C = C_0 + bY_d$$

$$Y_d = Y - T$$

$$T = T_0 + tY$$

- (i) Hitungkan pendapatan keseimbangan.
- (ii) Diberikan  $C_0 = \text{RM}100$ ,  $G_0 = \text{RM}330$ ,  $I_0 = \text{RM}90$ ,  $T_0 = \text{RM}240$ ,  $b = 0.75$ ,  $t = 0.20$ . Berapakah pendapatan keseimbangan?
- (iii) Hitungkan kesan ke atas pendapatan keseimbangan apabila cukai autonomi  $T_0$  meningkat sebanyak  $\text{RM}50$ .
- (iv) Andaikan paras pendapatan pada gunatenaga penuh adalah  $\text{RM}1000$ . Kerajaan ingin mencapai paras pendapatan  $\text{RM}1000$  ini melalui pengurangan cukai. Berapakah pengurangan cukai  $T_0$  yang diperlukan?
- (v) Apakah kesannya ke atas belanjawan kerajaan jika polisi pengurangan cukai itu dilaksanakan?

(12 markah)





LAMPIRAN

Peraturan Asas Pembezaan

Hasil Darab:  $y = uv$  di mana  $u = f(x), v = g(x)$

$$y' = uv' + vu'$$

Hasil Bahagi:  $y = \frac{u}{v}$  di mana  $u = f(x), v = g(x)$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Fungsi Logaritma: (i)  $y = \log_a x$

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

(ii)  $y = \ln x$

$$y' = \frac{1}{x}$$

(iii)  $y = \log_a u$  di mana  $u = f(x)$

$$y' = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \log_a e$$

(iv)  $y = \ln u$  di mana  $u = f(x)$

$$y' = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

Fungsi Eksponen: (i)  $y = a^x$

$$y' = a^x \ln a$$

(ii)  $y = e^x$

$$y' = e^x$$

(iii)  $y = a^u$  di mana  $u = f(x)$

$$y' = a^u \frac{du}{dx} \ln a$$

(iv)  $y = e^u$

$$y' = e^u \frac{du}{dx}$$

Pembeza bagi fungsi dua pembolehubah

(A)  $u = f(x, y)$

Pembeza pertama:  $du = f_x dx + f_y dy$

Pembeza kedua:  $d^2u = f_{xx} dx^2 + f_{yy} dy^2 + 2f_{xy} dx dy$

(B)  $u = f(x, y)$  di mana  $y = g(x)$

Pembeza pertama:  $du = f_x dx + f_y dy$

Pembeza kedua;  $d^2u = f_y d^2y + f_{xx} dx^2 + f_{yy} dy^2 + 2f_{xy} dx dy$

Maksimum dan Minimum

(A)  $y = f(x)$

syarat perlu:  $y' = 0$

syarat cukup: Maksimum:  $y'' < 0$

Minimum:  $y'' > 0$

Jika  $y'' = 0$  dan  $y''' \neq 0$ , titik infleksi

Jika  $y'' = 0$ ,  $y''' = 0$ ,  $y^{(4)} > 0$  (minimum)

Jika  $y'' = 0$ ,  $y''' = 0$ ,  $y^{(4)} < 0$  (maksimum)



(B)  $u = f(x, y)$

syarat perlu:  $f_x = 0$

$f_y = 0$

syarat cukup: Maksimum

$f_{xx} < 0$

$f_{yy} < 0$

$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$

Titik Infleksi

$f_{xx}$  dan  $f_{yy}$  mempunyai tanda yang sama

$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$

Minimum

$f_{xx} > 0$

$f_{yy} > 0$

$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$

Titik Pelana

$f_{xx}$  dan  $f_{yy}$  mempunyai tanda yang bertentangan

$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$

(C)  $u = f(x, y)$

tertakluk kepada:  $c = g(x, y)$  di mana  $g(x, y)$  adalah fungsi linear

dan  $y$  diungkapkan dalam  $x$

syarat perlu:  $\frac{f_x}{f_y} = -\frac{dy}{dx}$

syarat cukup: (maksimum)  $f_{xx}f_y^2 + f_{yy}f_x^2 - 2f_{xy}f_xf_y < 0$

(minimum)  $f_{xx}f_y^2 + f_{yy}f_x^2 - 2f_{xy}f_xf_y > 0$

(D)  $u = f(x, y)$

tertakluk kepada:  $C = h(x, y)$  di mana  $h(x, y)$  adalah fungsi tak linear

dan  $y$  diungkapkan dalam  $x$

syarat perlu:  $\frac{f_x}{f_y} = -\frac{dy}{dx}$

syarat cukup: (maksimum)  $f_{xx} + f_{yy} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2f_{xy} \frac{dy}{dx} + f_y \frac{d^2y}{dx^2} < 0$

(minimum)  $f_{xx} + f_{yy} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2f_{xy} \frac{dy}{dx} + f_y \frac{d^2y}{dx^2} > 0$

Peraturan Asas Kamiran

Kuasa:  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$

Eksponen:  $\int e^x dx = e^x + c$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int a^u dx = \frac{a^u}{\frac{du}{dx} \ln a} + c$$

$$\int e^u dx = \frac{e^u}{\frac{du}{dx}} + c$$

Logaritma:  $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

$$\int \frac{2x}{(x^2 + 1)} dx = \ln(x^2 + 1) + c \quad (\text{terbitan penyebut adalah sebutan pembilang})$$

Penggantian:  $\int (5x + 7)^8 dx$

Biarkan  $u = 5x + 7$

masalah menjadi  $\frac{1}{5} \int u^8 du$

Mengikut bahagian:  $\int v du = vu - \int u dv$

$$\int x(x+1)^{1/2} dx$$

Biarkan  $v = x$  dan  $du = (x+1)^{1/2} dx$

$$dv = dx \text{ dan } u = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$$

Gantikan ke dalam perkaitan tersebut



Secara pecahan separa:

$$\int \frac{1}{(M^2x^2 - N^2)} dx = \int \frac{1}{(Mx - N)(Mx + N)} dx$$

$$\text{Biarkan } \frac{1}{M^2x^2 - N^2} = \frac{A}{Mx - N} + \frac{B}{Mx + N}$$

Carikan A dan B. Gantikan dan dapat kamiran

Lebih Pengguna (CS) dan Lebih Pengeluar (PS)

$$CS = \int_0^{Q_0} f(Q) dQ - P_0 Q_0$$

di mana  $f(Q)$  adalah function permintaan dan  $P_0$  dan  $Q_0$  adalah harga dan kuantiti pada keseimbangan

$$PS = P_0 Q_0 - \int_0^{Q_0} g(Q) dQ$$

di mana  $g(Q)$  adalah function penawaran dan  $P_0$  dan  $Q_0$  adalah harga dan kuantiti pada keseimbangan

Secara pecahan separasi

$$\frac{1}{(Mx^2 - N)(Mx - N)(Nx - N)} = \frac{A}{Mx^2 - N} + \frac{B}{Mx - N} + \frac{C}{Nx - N}$$

Carikan A dan B. Gariskan dan dapat kaitkan

Lebihan parsial (2) dan (3) dan (4) dan (5)

$$C_2 = \int \frac{1}{(x^2 - 1)^2} dx$$

di mana (2) adalah fungsi pecahan rasional dan (3) dan (4) adalah fungsi yang diketahui pada kaitkan

$$C_3 = \int \frac{1}{(x^2 - 1)^2} dx$$

di mana (5) adalah fungsi pecahan rasional dan (6) dan (7) adalah fungsi yang diketahui pada kaitkan