

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1995/96

Mei/Jun 1996

JIM 313 - ALJABAR LINEAR LANJUTAN

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TIGA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
 - Jawab **EMPAT** soalan sahaja. Setiap soalan bernilai 100 markah.
 - Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
-

1. (a) Diberi U dan W subruang bagi \mathbb{R}^n . Buktikan $\dim U + \dim W = \dim (U \cap W) + \dim (U + W)$.

(60 markah)

(b) Diberi $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b-a \\ 2a & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ dan $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y+x \\ x-y & x+z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

Cari suatu asas bagi U , W , $U + W$ dan $U \cap W$ masing-masing.

(40 markah)

2. (a) A adalah matriks $n \times n$. Buktikan A terpepenjurukan (jika dan hanya jika) A mempunyai suatu set n vektor eigen yang tak bersandar linear.

(60 markah)

(b) Diberi $A = \begin{pmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cari R (tak singular) sedemikian $R^{-1}AR$

adalah matriks bentuk Jordan berkanun.

Jika $|A^2 - 3A + I - \lambda I| = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$, cari a , b , c dan d .

(40 markah)

3. (a) $T: V \longrightarrow W$ adalah suatu transformasi linear. Buktikan $\dim (R_T) + \dim (N_T) = \dim (V)$

(60 markah)

(b) $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ sedemikian $T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} X$.

Cari suatu asas bagi R_T , N_T , $R_T + N_T$ dan $R_T \cap N_T$ masing-masing.

(40 markah)

4. W adalah suatu subruang dari \mathbb{R}^n .

(a) Buktikan

(i) $W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w = 0 \ \forall w \in W\}$ adalah suatu subruang dari \mathbb{R}^n .

(ii) $W^\perp \cap W = \{\vec{0}\}$

(iii) $\mathbb{R}^n = W^\perp + W$

(70 markah)

$$(b) \ W = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

Cari suatu asas ortonormal bagi W dan W^\perp .

(30 markah)

5. A adalah matriks 2×2 . Buktikan:

(a) transformasi linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sedemikian $T(X) = AX$ adalah suatu isometri jdhj A adalah ortogon.

(50 markah)

(b) A simetri jdhj A terpepenjurukan secara ortogon.

(50 markah)

oooo0oooo

W is a 3x3 matrix with entries w_{ij} and $w_{ij} = w_{ji}$.
 $W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}$

Problem 1

(a) Find the eigenvalues and eigenvectors of W .
(b) Find the orthogonal matrix Q and the diagonal matrix D such that $W = QDQ^T$.

(c) Find W^2 .

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Can you find orthogonal Q and D ?

(d) Find W^{-1} .

(e) Find the trace of W .
(f) Find the determinant of W .

(g) Find W^3 .

(h) Find W^4 .

Problem 2

Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Find $A+B$, $A-B$, AB , and BA .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Can you find A^{-1} and B^{-1} ?