UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1995/96

Mei/Jun 1996

JIM 312 - Teori Kebarangkalian

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEPULUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

...2/-

1. (a) Berikut diberikan ruang sampel, S dan kebarangkalian yang diagihkan kepada setiap ahli ruang sampel tersebut.

	k	$2k$	$4k$	k	$2k$
S =	1	2	3	4	5

(i) Dapatkan nilai k dan seterusnya kebarangkalian bagi setiap ahli S.

(ii) Katakan A adalah peristiwa nombor genap dipilih daripada S dan B adalah peristiwa nombor perdana dipilih daripada S. Tentukan sama ada A dan B adalah dua peristiwa tak bersandar.

(iii) Berdasarkan takrifan A dan B di dalam (ii) hitungkan $P(A \mid B)$ dan $P(B \mid A)$.

(50 markah)

(b) X ialah suatu pembolehubah rawak

$$f(x) = \begin{cases} x , & 0 < x < 1 \\ 2 - x , & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

Dapatkan fungsi taburan longgokan bagi X.

(20 markah)

(c) Diberikan $Y \sim \chi^2_n$. Tanpa menggunakan fungsi penjana momen ataupun fungsi ketumpatan kebarangkalian taburan khi kuasa dua tunjukkan yang $E(Y) = n$ dan $Var(Y) = 2n$.

(30 markah)

...3/-

2. (a) Suatu syiling adil dilambung dua kali. Andaikan X mewakili bilangan kepala yang muncul pada lambungan pertama dan Y mewakili bilangan kepala yang muncul pada lambungan kedua.

   (i) Binakan jadual fungsi jisim kebarangkalian tercantum, $p(x, y)$.

   (ii) Dapatkan $p(x)$.

   (iii) Dapatkan $p(y \mid x)$.

   (iv) Adakah X dan Y tak bersandar? Berikan alasan.

(50 markah)

(b) X mempunyai fungsi ketumpatan kebarangkalian,

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 , & 0 < x < 1 \\ 0 , & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Tentukan a dan b supaya minnya ialah $\frac{2}{3}$.

(20 markah)

(c) Diberikan X mempunyai taburan t. Tunjukkan yang $E(X) = 0$.

(30 markah)

3. (a) Diberikan

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 , & -y < x < y , \ 0 < y < 1 \\ 0 , & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Tunjukkan X dan Y tak berkorelasi tetapi bersandar.

(50 markah)

(b) Diberikan rumus

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \ldots$$

Gunakan rumus ini dan terbitan-terbitannya untuk mendapat min dan varians bagi X yang tertabur dengan

$$p(x) = pq^x , \ x = 0, 1, 2, \ldots, \quad q = 1 - p.$$

(20 markah)

...4/-

(c) Terdapat 10 orang di dalam suatu bilik. Berapakah kebarangkalian sekurang-kurangnya 2 orang daripada 10 orang ini dilahirkan pada hari yang sama? Katakan setahun ada 365 hari.

(30 markah)

4. (a) Selesaikan masalah berikut dengan menggunakan taburan diskrit yang sesuai.

(i) Daripada rekod kejayaan suatu rawatan ke atas pesakit-pesakit yang mengidap penyakit tertentu, kita dapati $\frac{1}{3}$ sahaja yang pulih. Anda ingin melihat sejarah kes 3 pesakit yang telah sembuh. Sekiranya fail-fail sejarah kes ini bercampur aduk sama ada pulih ataupun tidak, berapakah kebarangkalian anda berjaya mendapatkan ketiga-tiga fail yang dicari setelah melihat paling banyak 10 fail sejarah kes?

(ii) Min bilangan panggilan telefon yang diterima oleh seorang operator di USM dari 9:00 – 11:00 pagi ialah 6. Berapakah kebarangkalian yang dia tidak akan mendapat sebarang panggilan pada masa yang sama esok?

(iii) Suatu peralatan elektrik mengandungi 5 bahagian berasingan. Ia akan berfungsi jika kelima-lima bahagian ini elok. Katakan kebarangkalian setiap bahagian berfungsi dengan baik ialah 0.9, berapakah kebarangkalian yang peralatan ini rosak?

(iv) Suatu sampel kereta mainan bersaiz 3 diambil daripada sebuah kotak yang mengandungi 12 buah kereta mainan. Jika 2 buah kereta di dalam kotak tersebut rosak, berapakah kebarangkalian tiada terdapat kereta rosak di dalam sampel yang pilih?

(50 markah)

(b) Lima biji dadu dilemparkan. Katakan X mewakili bilangan 1 yang muncul dan Y mewakili bilangan 2 yang muncul. Dapatkan rumus am bagi fungsi jisim kebarangkalian tercantum p(x, y).

(20 markah)

...5/-

(c) $X_1, X_2, ..., X_n$ dan $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ adalah dua sampel yang dicerap daripada taburan normal piawai. Dapatkan taburan bagi

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{j=1}^{m} Y_j^2\right)}$$

(30 markah)

5. (a) Selesaikan masalah-masalah berikut:

(i) Diberikan $E(X) = 2$, $V(X) = 3$ dan $Y = 2 - 3X$.
Hitungkan $\rho(X, Y)$.

(ii) Diberikan $V(X) = 5$, $V(Y) = 10$ dan $Cov(X, Y) = -1$.
Hitungkan $V(X + Y)$. Adakah X dan Y bersandar?

(iii) Diberikan $f(x, y) = 2, 0 < x < 1, 0 < y < x$.
Tunjukkan $E(XY) \neq E(X)E(Y)$

(50 markah)

(b) Sejenis rawatan bagi suatu penyakit mempunyai kadar sembuh $\frac{1}{3}$. Suatu ubat baru berbentuk vaksin boleh menaikkan kadar sembuh ini ke $\frac{1}{2}$. Suatu kajian terhadap vaksin baru ini dijalankan ke atas 12 orang pesakit. Kementrian Kesihatan akan menganggap rawatan baru ini lebih baik jika sekurang-kurangnya 7 orang pulih setelah menjalani rawatan tersebut. Dapatkan kelebihan kebarangkalian kejayaan rawatan baru ke atas kebarangkalian kejayaan rawatan lama.

(20 markah)

(c) $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah sampel daripada X yang tertabur secara eksponen $\left(\frac{1}{\beta}\right)$. Dengan menggunakan Teorem Had Memusat dapatkan selang keyakinan 95% bagi β.

(30 markah)

...6/-

6. (a) Katakan X adalah suatu pembolehubah rawak diskrit yang mempunyai fungsi taburan longgokan

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 0.2 & , \quad 1 \leq x < 2 , \\ 0.6 & , \quad 2 \leq x < 3 , \\ 0.8 & , \quad 3 \leq x < 4 , \\ 0.9 & , \quad 4 \leq x < 5 , \\ 1 & , \quad 5 \leq x \end{cases} .$$

(i) Dapatkan median X,

(ii) Dapatkan quantil ke-90 , $t_{0.9}$.

(iii) Dapatkan min X.

(iv) Dapatkan mod X.

(50 markah)

(b) X tertabur secara binomial (n, p). Andaikan Y adalah suatu pembolehubah rawak yang diperolehi daripada X dengan membuangkan nilai X = 0. Dapatkan taburan Y, yakni rumus am bagi fungsi jisim kebarangkalian Y.

(20 markah)

(c) Diberikan $f(x \mid \alpha) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$ dan $f(\alpha) = e^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Dapatkan fungsi ketumpatan sut x, f(x).

(30 markah)

Senarai rumus

1. $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$

2. $\Gamma(n) = (n-1)!$

3. $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

4. $B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$

5. $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

...8/-

Taburan	Parameter	Fungsi Jisim Kebarangkalian	Fungsi Penjana Momen	Min	Varians
Bernoulli	p	$p_X(x) = \begin{cases} q, x = 0 \\ p, x = 1 \end{cases}$	$pe^t + q$	p	pq
Binomial	n, p	$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ x = 0, 1, 2, \cdots n. \end{cases}$	$(pe^t + q)^n$	np	npq
Hipergeometri	n, N, K	$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\ x = 0, 1, 2, \cdots n. \end{cases}$	–	$\dfrac{nK}{N}$	$\dfrac{nK(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$
Geometri	p	$p_X(x) = \begin{cases} q^{x-1} p, \\ x = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$	$\dfrac{pe^t}{1 - qe^t}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$

...9/-

Taburan	Parameter	Fungsi Jisim Kebarangkalian	Fungsi Penjana Momen	Min	Varians
Negatif Binomial	r, p	$p_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \\ x = r, r+1, r+2, \ldots \end{cases}$	$\left(\dfrac{pe^t}{1 - qe^t}\right)^r$	$\dfrac{r}{p}$	$\dfrac{rq}{p^2}$
Poisson	λ	$p_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} \\ x = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$	$e^{\lambda(e^t - 1)}$	λ	λ

Taburan	Fungsi Ketumpatan Kebarangkalian	Parameter	Min	Varians	Fungsi Penjana Momen
Seragam	$\frac{1}{b-a}$, $a < x < b$	$-\infty < a < b < \infty$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ bagi $-\infty < x < \infty$	$-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$	μ	σ^2	$e^{(\mu t + \sigma^2 t^2/2)}$
Eksponen	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$\lambda > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$, $t < \lambda$
Gamma	$\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$\lambda > 0$, $n > 0$	n/λ	n/λ^2	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$, $t < \lambda$
Khi Kuasa Dua	$\frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} x^{v/2-1} e^{-x/2}$	$\upsilon = 1, 2, 3, \ldots$	υ	2υ	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\upsilon/2}$, $t < 1/2$
Beta	$\frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ bagi $0 < x < 1$	$a > 0$, $b > 0$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$	–

oooOooo