

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1995/96

Mei/Jun 1996

JJM 311 - ANALISIS VEKTOR

Masa: [3 jam]

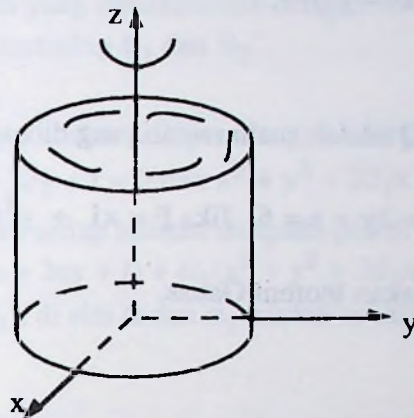
ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
 - Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
 - Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
 - Alat pengira elektronik tak berprogram boleh digunakan.
-

1. (a) Cari nilai α supaya titik-titik $(-1, 2, 1)$, $(4, -1, 1)$, $(3, 8, 2)$ dan $(5, \alpha, 0)$ terletak pada suatu satah yang sama. (35 markah)
- (b) Buktikan bagi setiap yang berikut untuk sebarang vektor \underline{a} dan \underline{b} ,
- (i) Jika $|\underline{a} + \underline{b}| = |\underline{a} - \underline{b}|$, maka \underline{a} dan \underline{b} berserenjang
- (ii) $|\underline{a} \times \underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2$. (30 markah)
- (c) Dua objek P dan Q bergerak dengan halaju yang masing-masing diwakili oleh $\underline{v}_1 = 4\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}$ dan $\underline{v}_2 = 2\underline{i} + \underline{j} - 5\underline{k}$. Cari halaju relatif bagi Q terhadap P. Pada masa $t = 0$, P dan Q masing-masing berada pada titik $(0, 0, 0)$ dan $(x, y, 4)$. Sekiranya P dan Q berlanggar, cari nilai x dan y . Apakah nilai t apabila perlanggaran berlaku dan dimanakah ini berlaku? (unit ukuran masa ialah saat). (35 markah)
2. (a) Nilaikan fluks medan vektor $\underline{M} = \underline{i} + xy\underline{j}$ yang sama menembusi permukaan yang diberikan oleh $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2$, bagi $0 \leq u \leq 1$ dan $0 \leq v \leq 1$. (35 markah)
- (b) Jika $\underline{A} = r^n \underline{r}$, dengan $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ dan $r = |\underline{r}|$. Cari $\text{div } \underline{A}$, dan tunjukkan $\text{grad}(\text{div } \underline{A}) = n(3 + n)r^{n-2} \underline{r}$. (30 markah)

- (c) Suatu cecair berpusing dalam sebuah tangki berbentuk silinder yang berjari 2 unit. Jika gerakan cecair itu diperihalkan oleh medan halaju

$\underline{F}(x, y, z) = -y\sqrt{x^2 + y^2} \underline{i} + x\sqrt{x^2 + y^2} \underline{j}$. Cari $\iint_S \text{curl } \underline{F} \cdot \underline{\hat{n}} dS$, jika S adalah permukaan atas tangki itu (lihat Rajah 1)



Rajah 1

(35 markah)

3. (a) Cari persamaan garis lurus yang melalui titik $(2, 6, -1)$ dan berserenjang dengan vektor-vektor $2\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$ dan $\underline{i} - \underline{j} - \underline{k}$.

(35 markah)

- (b) Diberi dua satah S_1 dan S_2 seperti berikut:

$$S_1: 2x + 6y + 3z - 7 = 0$$

$$S_2: \underline{r} \cdot (-2\underline{i} + 2\underline{j} + 6\underline{k}) = 20$$

- (i) Cari sudut di antara satah S_1 dan S_2 .
 (ii) Cari jarak titik $(1, 2, 3)$ dari satah S_1 .

(35 markah)

- (c) D adalah titik tengah sisi AB bagi segitiga ABC, dan titik E adalah suatu titik pada garis lurus yang melalui CB, supaya $CB = BE$. Tunjukkan bahawa garis lurus yang melalui D dan E bersilang dengan sisi AC pada titik yang membahagi AC dalam nisbah 1:2.

(30 markah)

4. (a) Nyatakan teorem Stokes. Dengan menggunakan teorem ini cari nilai

kamiran permukaan $\iint_S \text{curl } \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS$, di sini

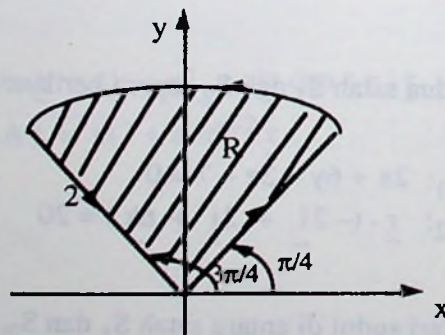
$\underline{F}(x, y, z) = (1 - z) y \underline{i} + ze^x \underline{j} + x \sin z \underline{k}$ dan S ialah hemisfera
 $z = (a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$.

(35 markah)

(b) Katakan Q adalah suatu rantau yang dibatasi oleh satah-satah koordinat dan satah $2x + 2y + z = 6$. Jika $\underline{F} = x \underline{i} + y^2 \underline{j} + z \underline{k}$, cari $\iint_S \text{curl } \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS$ dengan menggunakan teorem Gauss.

(35 markah)

(c) Cari nilai $\int_C xy \, dx + x^2 \, dy$, jika R adalah rantau yang dibatasi oleh dua garislurus dan satu lengkok yang mempunyai persamaan kutub $\theta = \pi/4$, $\theta = 3\pi/4$ dan $r = 2$, C adalah sempadan bagi R yang diorientasikan dalam lawan arah jam (lihat Rajah 2)



Rajah 2

(30 markah)

5. (a) Diberi dua bulatan

$$B_1: x^2 + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

$$B_2: x^2 + y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0$$

(i) Nyatakan apakah yang dimaksudkan dengan sebutan "suatu pensil bulatan-bulatan terhadap B_1 dan B_2 ".

(ii) Jika titik $A(x_1, y_1)$ adalah titik persilangan bulatan-bulatan $x^2 + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ dan $x^2 + y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0$, tunjukkan bahawa setiap bulatan daripada pensil bulatan-bulatan $\alpha(x^2 + y^2 + 2dx + 2ey + f) + \alpha_1(x^2 + y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1) = 0$ melalui $A(x_1, y_1)$, di sini α dan α_1 adalah sebarang nombor nyata.

(35 markah)

(b) Cari persamaan bulatan daripada pensil $\alpha(x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4) + \alpha_1(x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1) = 0$ yang melalui titik $(1, 2)$.

(25 markah)

(c) Katakan dua bulatan $S_1: x^2 + y^2 - 2dx - 2ey + f = 0$ dan $S_2: x^2 + y^2 - 2d_1x - 2e_1y + f_1 = 0$ yang masing-masing berpusat pada

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} -d \\ -e \end{pmatrix} \text{ dan } \underline{c}_1 = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -e_1 \end{pmatrix}$$

(i) Cari suatu vektor \underline{u} yang selari dengan paksi radikal S_1 dan S_2 .

(ii) Seterusnya tunjukkan bahawa \underline{u} adalah berserenjang dengan $\underline{c}_1 - \underline{c}$.

(40 markah)

6. (a) Satu daya \underline{F} yang malar bertindak ke atas zarah berjirim m menukar halajunya dari \underline{v}_1 ke \underline{v}_2 dalam masa s .

(i) Tunjukkan bahawa

$$\underline{F} = \frac{m}{s} (\underline{v}_2 - \underline{v}_1)$$

(ii) Adakah keputusan dalam (i) sah jika daya tersebut tidak malar. Terangkan.

(30 markah)

(b) Cas titik $q_1 = 300\mu\text{C}$ yang terletak pada $(1, -1, -3)\text{m}$ mengalami daya elektrostatik

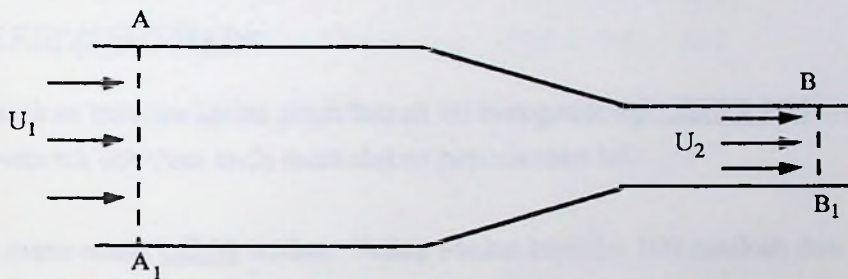
$$\underline{F}_1 = 8\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k} \text{ Newton}$$

disebabkan oleh kehadiran cas q_2 pada $(3, -3, -2)\text{m}$. Tentukan magnitud cas q_2 .

(30 markah)

- (c) Dalam Rajah 3 di bawah, suatu bendalir tak mampat yang mempunyai ketumpatan ρ mengalir disepanjang paip mendatar yang nipis dan keratan rentasnya tidak seragam. Tekanan pada dua titik A(keratan rentasnya A_1) dan B(keratan rentasnya B_1) pada paip itu ialah p_1 dan p_2 masing-masing. Dengan menganggap bahawa pada titik A dan B, halaju bendalir (masing-masing diberi oleh U_1 dan U_2) yang melalui keratan rentas adalah malar dan normal kepadanya, tunjukkan bahawa jisim bendalir yang mengalir dalam paip per unit masa ialah

$$A_1 B_1 \sqrt{\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{A_1^2 - B_1^2}}$$



Rajah 3

(40 markah)

- ooo0ooo -

