

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1995/96

Mei/Jun 1996

JIM 213 - PERSAMAAN PEMBEZAAN 1

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
 - Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
 - Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
-

...2/-

1. (a) Selesaikan

(i) $y' + 2y = x^2$

(ii) $ydx - xdy = xydx$

(30 markah)

(b) Diberi persamaan Bernoulli

$$y' + y P(x) = y^n Q(x) \quad (n \neq 0, n \neq 1),$$

dengan menggunakan penggantian yang sesuai, tukarkan persamaan tersebut kepada suatu persamaan linear peringkat pertama. Seterusnya selesaikan $y' + \frac{3}{x}y = x^2y^2, x > 0$.

(40 markah)

(c) Tunjukkan bahawa persamaan

$$2xy \, dx + x^3 \, dy = 0 \text{ tidak tepat.}$$

Dengan mencari faktor pengkamir selesaikan persamaan tersebut.

(30 markah)

2. (a) Cari suatu persamaan pembezaan linear homogen peringkat kedua jika fungsi-fungsi

$$e^{-x} \sin(x - 1) \text{ dan } e^{-x} \sin(x + 1)$$

membentuk suatu set penyelesaian asasi.

(20 markah)

...3/-

(b) Selesaikan persamaan

$$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$$

dengan menggunakan kaedah

- (i) Koefisien belum tentu
- (ii) Kaedah variasi parameter

(40 markah)

(c) Tunjukkan persamaan pembezaan Euler

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$$

a, b, c pemalar

$$a \neq 0, x > 0$$

boleh ditukarkan kepada persamaan

$$\frac{ad^2y}{dz^2} + (b-a) \frac{dy}{dz} + cy = g(e^z).$$

(40 markah)

3. (a) Jika $A(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin t \end{pmatrix}$, tahkikkan bahawa suatu penyelesaian bagi $X' = AX + b$ adalah

$$U(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -2 \sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

(30 markah)

(b) Dapatkan penyelesaian

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + x_2, \quad x_1(0) = 2 \\x_2' &= 4x_1 + x_2, \quad x_2(0) = 3\end{aligned}$$

dengan kaedah

- (i) penghapusan
- (ii) matriks

(40 markah)

(c) Jika ϕ_1, \dots, ϕ_r ialah penyelesaian bagi $X' = AX$, tunjukkan sebarang gabungan linear $\phi = c_1\phi_1 + \dots + c_r\phi_r$ adalah juga suatu penyelesaian bagi $X' = AX$ untuk sebarang pemalar c_1, \dots, c_r

(30 markah)

4. (a) Dapatkan e^{At} jika

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dan seterusnya}$$

selesaikan $X' = AX$.

(30 markah)

(b) Cari dua penyelesaian tak bersandar linear bagi sistem persamaan $X' = AX$ dan seterusnya selesaikan $X' = AX + B$ jika

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

(40 markah)

...5/-

(c) Jika $\lambda = 2 \pm 3i$ merupakan nilai eigen bagi masalah nilai awal

$X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} X$ $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dapatkan penyelesaian nyata bagi masalah tersebut.

(30 markah)

5. (a) Cari

(i) $\mathcal{L}\{\cos^2 t\}$

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2S}{S^2 - 4S + 20}\right\}$

(40 markah)

(b) Katakan f ditakrifkan sebagai

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

(i) Cari $\mathcal{L}\{f(t)\}$

(ii) Selesaikan $y'' + 4y = f(t)$, $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$

(40 markah)

(c) Tuliskan fungsi

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a \\ t-a, & t \geq a \end{cases}$$

dalam sebutan yang melibatkan fungsi langkah unit $U(t - a)$.

(20 markah)

...6/-

6. (a) Dengan menggunakan teorem konvolusi, dapatkan

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(S + a)^2(S - b)} \right\}$$

(30 markah)

(b) Tunjukkan bahawa penyelesaian bagi persamaan $xy'' - y' - xy = 0$ tertakluk kepada syarat awal $y(0) = 0$ ialah $y(x) = c \mathcal{L}^{-1} \{ (S^2 - 1)^{3/2} \}$, c pemalar.

(35 markah)

(c) Dengan menggunakan kaedah Jelmaan Laplace, selesaikan sistem persamaan pembezaan

$$2 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x = 1$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2$$

$$x(0) = 0, y(0) = 0.$$

(35 markah)

**JELMAAN LAPLACE BAGI BEBERAPA FUNGSI
ASAS F(T)**

	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	$t^n, n = 1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
4	$\cos wt$	$\frac{s}{s^2 + w^2}$
5	$\sin wt$	$\frac{w}{s^2 + w^2}$
6	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
7	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$

- oooOooo -

LEMBARAN LAPORAN BAGI BEBERAPA FUNGSI

ASAS (1)

F(x) = 2x ² - 3x + 1	(1)	
$\frac{d}{dx} (2x^2 - 3x + 1) = 4x - 3$	$f'(x) = 4x - 3$	1
$\frac{d}{dx} (4x - 3) = 4$	$f''(x) = 4$	2
$\frac{d}{dx} (4) = 0$	$f'''(x) = 0$	3
$\frac{d}{dx} (0) = 0$	$f^{(4)}(x) = 0$	4
$\frac{d}{dx} (0) = 0$	$f^{(5)}(x) = 0$	5
$\frac{d}{dx} (0) = 0$	$f^{(6)}(x) = 0$	6