

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1995/96

Mei/Jun 1996

JIM 211 - Kalkulus Lanjutan

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira elektronik tak berprogram boleh digunakan.

1. (a) Selesaikan

(i) $\iint_R 8xy \, dx \, dy$

R adalah rantau yang terkandung dalam sebuah trapezium yang mempunyai bucu dititik-titik (2, 2), (4, 2), (5, 4) dan (2, 4).

(ii) $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (2x + y) \, dy \, dx$

(35 markah)

(b) Diberi $w = v(x, y) e^{\alpha x + \beta y}$, α, β adalah pemalar dan $v(x, y)$ suatu fungsi x, y supaya $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$. Cari $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ dan $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Seterusnya dapatkan nilai α dan β jika $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} + w = 0$.

(35 markah)

(c) Ukuran bagi sebuah kotak segiempat tepat adalah 10 cm, 12 cm dan 15 cm. Ukuran-ukuran ini tepat setakat 0.02 cm. Anggarkan ralat terbesar jika isipadu kotak dikira dengan ukuran yang diberikan. Cari juga peratusan ralat ini.

(30 markah)

2. (a) Dengan menggunakan ujian yang sesuai, tentukan sama ada siri-siri berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^2 + 4}$

(30 markah)

(b) Tunjukkan bahawa siri kuasa bagi $\tan x$ diberi oleh

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \dots$$

Seterusnya, dapatkan siri kuasa bagi $\sec^2 x$ dan $\log(\cos x)$.

(40 markah)

(c) Buktikan $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

(30 markah)

3. (a) Fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ ditakrifkan secara tersirat seperti berikut:

$$u^2 + 2x = v^2$$

$$uv - y = 0$$

Cari

(i) $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan $\frac{\partial v}{\partial x}$

(ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(35 markah)

(b) Cari nilai kamiran berikut:

(i) $\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz$

di sini, $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$

(ii) $\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_{x-y}^{x+y} 2x^3 y^2 z dz dy dx$

(35 markah)

- (c) Suatu cakera membulat diberi oleh rantau D yang dibatasi oleh bulatan $x^2 + y^2 = 1$. Jika T darjah adalah suhu pada sebarang titik (x, y) pada cakera dan $T = 2x^2 + y^2 - y$, cari titik yang terpanas dan tersejuk pada cakera. Apakah sifat fungsi T dan rantau D yang menjamin wujudnya titik yang terpanas dan titik yang tersejuk pada D ?

(30 markah)

4. (a) Buktikan yang berikut:

(i) Jujukan $(2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$ menumpu

(ii) Jujukan $\left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2+n} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\}$ menokok dan terbatas.

(35 markah)

- (b) Tunjukkan bahawa jujukan $\left\{ \frac{nx^2}{1+nx} \right\}$ menumpu ke fungsi $f(x) = x$ secara seragam dalam selang $[0, 1]$.

(35 markah)

- (c) Bagi setiap jujukan berikut, tentukan sama ada ia memenuhi kriterium Cauchy atau tidak.

(i) $\left\{ \frac{n+1}{n^2} \right\}$

(ii) $\{ \sqrt{n} \}$.

(30 markah)

5. (a) Dengan menggunakan kaedah pendarab Lagrange atau cara lain, cari titik dan nilai ekstremum bagi fungsi

$$f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$$

pada rantau $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16 \}$

(40 markah)

(b) Selesaikan

$$(i) \iint_R (x + 2y + 3) dy dx$$

R adalah rantau yang dibatasi dibahagian atas oleh parabola $y = 4 - x^2$ dan bahagian bawah oleh paksi-x.

$$(ii) \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^6 \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx.$$

(30 markah)

(c) Suatu bongkah Q yang berbentuk kon diberikan oleh

$$Q = \{x, y, z \mid x^2 + y^2 \leq 3z^2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Ketumpatannya adalah suatu pemalar α . Cari jisim dan pusat jisimnya.

(30 markah)

6. (a) Cari jejari dan selang penumpuan bagi setiap siri berikut:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^n}$$

$$(ii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)(x-2)^n}{2^n}$$

(30 markah)

(b) Cari polinomial Taylor $P_4(x)$ dan baki $R_5(x)$ (bentuk Lagrange) dalam kuasa-kuasa $x-a$ bagi fungsi f yang ditakrifkan oleh

$$f(x) = xe^x, a = 1.$$

(40 markah)

(c) Buktikan

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n n!}{n^n} = 0$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} (a + n)^{\frac{1}{n}} = 1, \text{ jika } a > 0 \text{ dan } b > 0.$$

(30 markah)

- 000000 -