

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1995/96

Mei/Jun 1996

JIM 103 - Aljabar Linear Permulaan

Masa : [2 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
 - Jawab mana-mana **EMPAT** soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan di perlihatkan di penghujung subsoalan itu.
 - Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
 - Alat pengira elektronik tak berprogram boleh digunakan.
-

1. (a) Diberi $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Dengan menggunakan hukum kalis taburan dan pemfaktoran, dapatkan

$$A - A^2 + BA - B.$$

(25 markah)

(b) Diberi $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Berikan syarat-syarat yang diperlukan bagi matriks B, supaya $AB = BA$ adalah benar, kemudian berikan satu contoh bagi matriks B.

(35 markah)

(c) Bagi setiap pernyataan berikut, buktikan jika benar dan sangkalkan dengan satu contoh jika palsu.

(i) Jika $A + B = \tilde{O}$, maka $A^2 + 2AB + B^2 = \tilde{O}$.

(ii) Jika $AB = \tilde{O}$, maka $BA = \tilde{O}$.

(iii) Jika A dan B tak singular, maka $A+B$ juga tak singular.

(iv) Jika A simetri, maka A tak singular.

(40 markah)

2. (a) Diberi A adalah matriks tak singular di mana songsang bagi A adalah matriks

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cari matriks A dan dapatkan A sebagai suatu hasil darab matriks baris permulaan.

(40 markah)

(b) Ringkaskan ungkapan berikut, di mana A, B dan C matriks tak singular

$$(A^2 C)^{-1} AB^{-1} C (A^{-1} B^{-1} C)^{-1} \quad (15 \text{ markah})$$

(c) (i) A dan P adalah matriks nxn di mana P tak singular. Buktikan bahawa

$$(P^{-1} AP)^3 = P^{-1} A^3 P$$

(ii) Diberi $|Y| \neq 0$ dan $XY = YX$, buktikan bahawa

$$XY^{-1} = Y^{-1} X$$

(iii) Buktikan P tak singular jika P adalah matriks pepenjuru berperingkat n, di mana pemasangan pepenjurnya adalah bukan sifar. Kemudian berikan P^{-1} .

(45 markah)

3. (a) Diberi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Selesaikan persamaan linear $AX = \tilde{O}$ dan dapatkan pangkat bagi A.

(40 markah)

(b) Cari nilai-nilai k bagi matriks singular yang berikut:

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ k & 7 & 7 \\ 2 & 2k & 4 \end{pmatrix}$$

(20 markah)

(c) (i) Diberi A adalah matriks nxn di mana $A^T = A^{-1}$. Tunjukkan bahawa penentu bagi A adalah 1 atau -1.

(ii) Diberi persamaan $AX = \tilde{O}$ mempunyai penyelesaian P dan Q. Tunjukkan bahawa $(3P - 2Q)$ juga merupakan suatu penyelesaian.

(40 markah)

...4/-

4. (a) Dapatkan nilai eigen dan vektor eigen yang sepadan bagi matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(35 markah)

(b) Diberi $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

dan $|A| = 4$.

Dapatkan (i) $|2A^{-1}|$

(ii) $|\text{adj } A|$

(iii)

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ -d & -2e & -f \\ 3g & 6h & 3i \end{vmatrix}$$

(iv)

$$\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

(v) $A \text{ adj } A$

(40 markah)

(c) A adalah matriks tak singular nxn. Tunjukkan bahawa

$$(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj } A^{-1}$$

(25 markah)

5. (a) Berikan syarat ke atas r, supaya sistem persamaan linear berikut mempunyai penyelesaian yang tak terhingga banyaknya.

$$3x + y - 5z = q$$

$$2x - y + 3z = p$$

$$5x + 5y - 21z = -r$$

(30 markah)

...5/-

- (b) Dengan menggunakan petua Cramer, selesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned}x + 2y &= -1 \\3x + 7y - 5z &= 1 \\8y - 9z &= 1\end{aligned}$$

(30 markah)

- (c) E_i dan E_j^i adalah matriks baris permulaan berperingkat 5. Secara spontan (tanpa hitungan) dapatkan hasil darab matriks berikut dalam bentuk matriks baris permulaan dan kemudian cari penentu bagi setiap satu.

(i) $E_3(2) E_3\left(\frac{1}{2}\right) E_3(2)$

(ii) $(E_5^1)^3$

(iii) $E_2^4(1) E_2^4(-1) E_3^1(-1)$

(iv) $E_4(-5) E_4\left(-\frac{1}{5}\right)$

(40 markah)

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hitunglah $A + B$ dan $A - B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hitunglah $A + B$ dan $A - B$.

(i) $E_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $E_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $E_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $E_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$