

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1991/92

Jun 1992

JAM 353 - Analisis Kompleks

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
 - Jawab SEMUA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
 - Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
 - Alat pengira elektronik boleh digunakan.
-

1. (a) Untuk tiap-tiap subset bagi set nombor kompleks berikut, nyatakan sama ada ia terbuka, terkait, suatu domain atau terbatas.

- (i) $\{z : 0 \leq |z| < 1\}$;
- (ii) $\{z : 0 < |z| \leq 1\}$;
- (iii) $\{z : |z| < 3 \text{ dan } |\operatorname{Re}(z)| > 1\}$;
- (iv) $\{z : 0 < \operatorname{arg} z < \frac{\pi}{2}\}$;
- (v) $\{z : |z - i| < 2|z + 2i|\}$.

(40 markah)

(b) Tentukan jejari penumpuan siri Taylor bagi tiap-tiap fungsi berikut di sekitar z_0 .

- (i) $f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$, $z_0 = 0$;
- (ii) $f(z) = \frac{1}{4 + z^4}$, $z_0 = 3$;
- (iii) $f(z) = \frac{\cos z}{e^z + 2}$, $z_0 = 0$.

(30 markah)

(c) Tunjukkan bahawa $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ harmonik. Seterusnya kira nilai maksimum dan minimum bagi u di atas

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(30 markah)

2. (a) Tunjukkan bahawa $|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$, diberi $z = x + iy$.
 Dengan ini tunjukkan bahawa

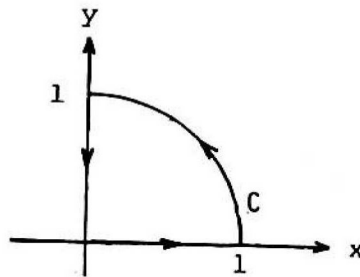
$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z \cos z} \right| \leq \frac{8\pi}{e^2 - 1},$$

kontur γ ialah segiempat dengan bucu-bucu $\pi \pm i, -\pi \pm i$, berorientasi positif.

(30 markah)

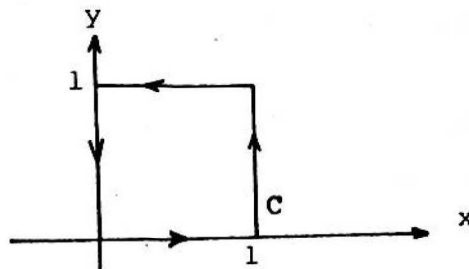
- (b) Nilaikan $\int_C |z|^2 dz$, C ialah

- (i) suku bulatan di dalam rajah 1,



Rajah 1

- (ii) segiempat di dalam rajah 2.



Rajah 2

(40 markah)

- (c) Nyatakan Teorem Modulus Maksimum. Buktikan bahawa nilai maksimum $|\cos z|$ di dalam dan di atas segiempat dengan bucu-bucu $\pi \pm i, -\pi \pm i$ diberi oleh $\frac{e^2 + 1}{2e}$.

(30 markah)

3. (a) (i) Nyatakan teorem kamiran Cauchy.
(ii) Nilaikan

$$\int_C \frac{e^{\pi z}}{16z^2 + 1} dz,$$

kontur C ialah separuh bawah bulatan $|z| = R$, berorientasi positif.

- (iii) Nilaikan

$$\int_C \frac{dz}{z^4 + 1},$$

kontur C ialah segiempat dengan bucu-bucu $z = -2, 2, 2 + 2i, -2 + 2i$, diperihalkan melawan arah jam.

(60 markah)

- (b) (i) Nyatakan Teorem Liouville.
(ii) Katakan f ialah fungsi seluruh dan $\operatorname{Re}(f)$ terbatas di dalam \mathbb{C} .
Tunjukkan bahawa f malar.

(40 markah)

... 5/-

4. (a) Nyatakan teorem Laurent. (10 markah)

(b) Dapatkan siri Laurent bagi

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z - 2)}$$

di dalam domain

(i) $1 < |z| < 2$,

(ii) $|z| > 2$,

(iii) $|z| < 1$.

(40 markah)

(c) Cari kesingularan dan tentukan jenisnya untuk tiap-tiap fungsi kompleks f berikut:

(i) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4(1 + z^2)}$;

(ii) $f(z) = \ln z$;

(iii) $f(z) = z \sin \frac{1}{z}$;

(iv) $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)}$.

(50 markah)

5. (a) (i) Dapatkan kutub-kutub bagi

$$f(z) = \frac{z}{(3z^2 - 10z + 3)^2}$$

Kira peringkat kutub-kutub ini.

(ii) Kira reja bagi f di tiap-tiap kutub di atas.

(iii) Dengan menggunakan bahagian (i) dan (ii), tunjukkan bahawa

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3 \cos \theta)^2} = \frac{5\pi}{32}.$$

(50 markah)

(b) Dengan menggunakan kamiran kontur, nilaikan

(i) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 9)^2} dx,$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx.$

(50 markah)

oooOooo