UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1991/92

Jun 1992

JAM 352 - Aljabar Moden I

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan berkenaan.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira eletronik boleh digunakan.

...2/-

1. (a) Bagi dua set A dan B, operasi $\oplus$ ditakrifkan dengan

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

(i) Buktikan $A \oplus (A \cup B) = B \oplus (A \cap B)$.

(ii) Jika $A \oplus B = A \oplus C$, buktikan $B = C$.

(30 markah)

(b) Suatu hubungan M ditakrifkan atas $\mathbb{R}$ dengan

$$xMy \Leftrightarrow x \leq y + 1.$$

Tentukan sama ada M

(i) refleksif

(ii) simetri

(iii) transitif.

(30 markah)

(c) Dua fungsi f dan g ditakrifkan oleh

$$(x)f = x^2 - 4 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(x)g = \begin{cases} x + 1 & , \quad x \leq o \\ x^2 + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Cari

(i) $(x)(fog)$

(ii) $(x)(gof)$

(iii) $(x)(gofog)$

(iv) $(x)(g^{-1})$.

(40 markah)

2. (a) Operasi * ditakrifkan atas $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oleh

$$(a, b) * (c, d) = (ac + ad + bc, bd)$$

Tentukan sama ada *

(i) kalis tukar tertib

(ii) kalis sekutuan.

(20 markah)

(b) Katakan $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ dan } a \neq 0\}$

Suatu operasi * ditakrifkan atau G oleh

$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$

(i) Buktikan bahawa (G, *) merupakan suatu kumpulan.

(ii) Katakan $H = \{(1, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Tentukan sama ada H suatu subkumpulan normal bagi G.

(50 markah)

(c) Katakan H, K dua subkumpulan normal bagi suatu kumpulan $< G, * >$. Buktikan HK adalah suatu subkumpulan bagi G.

(30 markah)

3. (a) Senaraikan semua unsur di dalam

(i) S_4

(ii) A_4.

(20 markah)

(b) Katakan

$H = \{e, (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1)\}$

$K = \{e, (1\ 2\ 4), (4\ 2\ 1)\}$

Tunjukkan H dan K adalah subkumpulan bagi S_4 tetapi HK bukan subkumpulan bagi S_4.

(30 markah)

(c) Katakan

$$N = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

Tunjukkan bahawa N adalah suatu subkumpulan normal bagi S_4. Senaraikan semua unsur di dalam S_4/N dan cari sifir Cayley bagi kumpulan hasil bahagi S_4/N ini.

(50 markah)

...4/-

4. (a) Katakan H ialah suatu subkumpulan bagi suatu kumpulan terhingga $<G, *>$. Buktikan bahawa $|G|$ terbahagikan oleh $|H|$.

(30 markah)

(b) Katakan H ialah suatu subkumpulan bagi suatu kumpulan terhingga $<G, *>$. Jika $|G| = 2|H|$, buktikan H adalah suatu subkumpulan normal bagi G.

(30 markah)

(c) Buktikan bahawa jika p ialah suatu nombor perdana dan a ialah suatu integer, maka

$$a^p \equiv a(\text{mod } p)$$

(40 markah)

5. (a) Katakan $G = <a>$ ialah suatu kumpulan kitaran dan $0(a) = 8$. Katakan m ialah suatu integer positif yang tetap dan fungsi $f:G \rightarrow G$ ditakrifkan oleh

$$(x)f = x^m \qquad \forall x \in G.$$

Buktikan f adalah suatu endomorfisma.
Cari nilai-nilai m supaya f merupakan suatu automorfisma atas G.

(40 markah)

(b) Jika $\alpha \in S_3$ dan fungsi $\phi_\alpha : S_3 \rightarrow S_3$ ditakrifkan dengan

$$(x)\phi_\alpha = \alpha^{-1} o \chi o \alpha \quad \forall x \in S_3$$

Buktikan ϕ_α adalah suat automorfisma atas S_3.

(30 markah)

(c) Cari semua automorfisma atas S_3.

(30 markah)

6. Katakan C = set semua nombor kompleks dan Z = set semua integer.

Katakan

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d, \in C \right\}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad a, b \in C \text{ dan } \bar{a} \text{ ialah konjugat bagi } a. \right\}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad a, b \in Z \right\}$$

Katakan "+" dan "x" ialah penambahan dan pendaraban matriks.

(a) Tunjukkan <M, +, x> adalah suatu gelanggang.

(40 markah)

(b) Tunjukkan <K, +, x> adalah suatu gelanggang pembahagian.

(30 markah)

(c) Tentukan sama ada <H, +, x> merupakan suatu domain integer atau tidak.

(30 markah)

oooOooo