UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1991/92

Jun 1992

JAM 243 - Kaedah Matematik

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab SEMUA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira elektronik boleh digunakan.

---

1. (a) Jika $z \in \mathbb{C}$, dapatkan lokus z yang ditentukan oleh persamaan

$$\left|\frac{z - 2}{z + 2}\right| = 2.$$

(12 markah)

(b) Tuliskan nombor kompleks

$$\frac{(1 + \sqrt{3}\, i)^3}{(1 + i)^7}$$

di dalam bentuk a + ib, $i = \sqrt{-1}$.

(13 markah)

(c) Buktikan bahawa

$$\underline{\nabla} \cdot (\phi \underline{F}) = \phi \underline{\nabla} \cdot \underline{F} + \underline{F} \cdot \underline{\nabla} \phi.$$

(13 markah)

(d) Diberi vektor $\overrightarrow{BA} = -3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ dan $\overrightarrow{BC} = -4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$. Kira vektor normal unit kepada satah yang mengandungi kedua-dua vektor $\overrightarrow{BA}$ dan $\overrightarrow{BC}$.

(12 makah)

(e) Tunjukkan bahawa

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

(12 markah)

(f) Nilaikan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{4s^2 + 1}\right\}.$$

(13 markah)

(g) Lakarkan graf f jika

$$f(x) = \begin{cases} x \;, & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 1-x \;, & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

$$f(x + 2L) = f(x) \;, \; \forall x$$
$$f(-x) = -f(x) \;, \; \forall x.$$

(13 markah)

(h) Tuliskan bentuk am persamaan pembezaan separa linear peringkat kedua di dalam dua pembolehubah tak bersandar x, y. Kelaskan persamaan ini di dalam tiga kelas : parabolik, eliptik dan hiperbolik.

(12 markah)

2. Di dalam soalan ini $z, w \in \mathbb{C}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

(a) (i) Dapatkan semua nilai $i^{1/3}$.

(ii) Selesaikan persamaan

$$(z + 2)^3 = iz^3 .$$

(iii) Selesaikan persamaan

$$\sin z = 2.$$

(iv) Nilaikan $(1 + \sqrt{3}\, i)^{-2i}$. Nyatakan nilai prinsipalnya.

(v) Buktikan bahawa $|z + w| \le |z| + |w|$.

(70 markah)

(b) Tuliskan dengan jelas satu penerangan tentang cabang utama bagi log z, potongan cabang dan titik cabang. Sertakan rajah untuk menjelaskan lagi penerangan anda ini.

(30 markah)

3. (a) (i) Nyatakan teorem konvolusi.

(ii) Dengan menggunakan teorem konvolusi, nilaikan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+9)^2}\right\}$$

(30 markah)

(b) Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, buktikan bahawa

(i) $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$.

(ii) $\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \dfrac{d^2}{ds^2} F(s)$.

Tuliskan rumus bagi . $\{f^{(n)}(t)\}$ dan . $\{t^n f(t)\}$, $n = 1, 2, 3 \ldots.$

(20 markah)

(c) Selesaikan masalah nilai awal.

$$xy'' + 2(x-1)y' - 2y = 0 \ , \ y(0) = 0.$$

(50 markah)

4. (a) Sebutir zarah bergerak di dalam medan daya $\underline{F} = (2x + y^2)\hat{i} - 3yz\hat{j} + \hat{k}$ dari titik (0, 0, 0) ke (1, 1, 1). Kira kerja terlaksana sekiranya pergerakan ini berlaku di sepanjang

(i) tiga tembereng garis (0, 0, 0) ke (1, 0, 0), (1, 0, 0) ke (1, 1, 0) dan (1, 1, 0) ke (1, 1, 1);

(ii) tembereng garis dari (0, 0, 0) ke (1, 1, 1).

(40 markah)

(b) Nilaikan

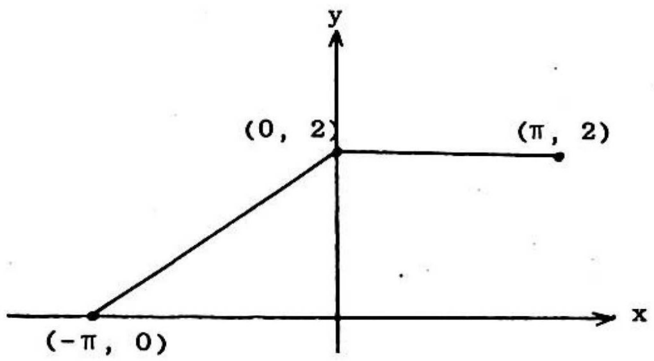
(i) $\iint_S \underline{F}.d\underline{S}$, diberi $\underline{F} = z\hat{j} - \hat{k}$ dan S ialah permukaan

$x = \sin u \cos v$, $y = \sin u \sin v$, $z = \cos^2 u$ dengan $0 \leq u \leq \frac{1}{2}\pi$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$.

(ii) $\iiint_V \underline{F}\, dV$, di beri $\underline{F} = xy\hat{i} - z\hat{j} + 2xz\hat{k}$ dan V isipadu sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(60 markah)

5. (a) Graf fungsi f ditunjukkan di dalam rajah 1 di bawah.



Rajah 1

Tunjukkan siri Fourier untuk f(x) di dalam selang $(-\pi, \pi)$ diberi oleh

$$f(x) = \frac{3}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin nx \right].$$

(60 markah)

(b) Dengan menggunakan masalah nilai sempadan (persamaan haba)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = T_0 \neq 0, \quad t > 0$$
$$u(L, t) = T_1 \neq 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x),$$

(c pemalar) sebagai contoh, terangkan konsep penyelesaian berkeadaan mantap. Seterusnya tunjukkan cara menurunkan masalah di atas kepada masalah nilai sempadan yang homogen.

(40 markah)

LAMPIRAN

Sifir Jelmaan Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
t^n, n = integer positif	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$, $s > a$
cos at	$\frac{s}{s^2 + a^2}$, $s > 0$
sin at	$\frac{a}{s^2 + a^2}$, $s > 0$
sinh at	$\frac{a}{s^2 - a^2}$, $s > \lvert a \rvert$
cosh at	$\frac{s}{s^2 - a^2}$, $s > \lvert a \rvert$

ooo0ooo