UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1991/92

Jun 1992

JAM 242 - Teori Kebarangkalian I

[Masa: 3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab SEMUA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah pada subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira elektronik boleh digunakan.

...2/-

1. (a) Tentukan P(A), P(B) dan P(C) jika keempat-empat syarat berikut dipenuhi

   (i) A, B & C adalah saling tak bersandar.

   (ii) $P(B \cap \bar{C}) = \frac{1}{2}P(A)$

   (iii) $P(B) = \frac{1}{3P(C)}$

   (iv) $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

(35 markah)

   (b) Buktikan sifat-sifat jangkaan berikut:

   (i) $E[a\,H(x)] = a\,E[H(x))]$.

   (ii) $E[H(x) + G(x)] = E[H(x)] + E[G(x)]$.

(30 markah)

   (c) Suatu populasi tikus mengandungi 70% tikus Andean dan 30% tikus Himalayan. Di antara tikus Andean, 30% mempunyai telinga merah muda, sedangkan di antara Himalayan, 50% bertelinga merah muda. Seekor tikus dipilih secara rawak dari populasi itu dan didapati ianya bertelinga merah muda. Dapatkan kebarangkalian bahawa tikus itu ialah tikus Andean.

(35 markah)

2. (a) Katakan bilangan pembeli yang memasuki sebuah pasaraya setiap jam suatu p.r. Poisson dengan $\lambda = 12$. Tepat jam 10:00 pagi kita mula mengira bilangan pembeli yang memasuki pasaraya tersebut. Berapakah kebarangkalian masa menunggu kemasukan pembeli kelima melebihi 20 minit selepas jam 10:00 pagi?

(30 markah)

...3/-

(b) X ialah suatu p.r. dengan

$$E(X^{2m}) = \frac{(2m)!}{(2^m m!)} \quad , \quad m = 1, 2, 3 \ldots$$

dan $E(X^{2m-1}) = 0$, $m = 1, 2, 3, \ldots$
Dapatkan $M_X(t)$ dan nyatakan taburan bagi X.

(40 markah)

(c) Jika $X_1, X_2, \ldots X_n$ adalah sampel dari populasi eksponen dengan f.k.k.

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{ditempat lain.} \end{cases}$$

dapatkan suatu batas atas bagi

$P(\bar{X} > 2)$.

(30 markah)

3. (a) Katakan X dan Y mempunyai f.j.k. tercantum

$$p(x, y) = \frac{2x + y}{k} \quad , \quad x = 1, 2, 3$$
$$y = 1, 2.$$

(i) Cari nilai pemalar k .
(ii) Cari $P(X + Y > 2)$.
(iii) Cari f.j.k. bagi $Z = X - Y$.
(iv) Adakah X dan Y tak bersandar? Terangkan.

(40 markah)

(b) Katakan p.r. X mempunyai suatu f.k.k. selanjar f(x). Jika fungsi taburan longgokannya F(X) adalah menaik berekanada tegas, cari f.k.k.bagi $Y = F(X)$ dan nyatakan taburannya.

(30 markah)

...4/-

(c) $X_1, X_2, \ldots, X_{2n-1}$ adalah sampel rawak dari suatu populasi yang mempunyai purata μ dan varians σ^2. Takrifkan

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$$
$$Z = X_n + X_{n+1} + X_{n+2} + \ldots + X_{2n-1}.$$

Cari koefisien korelasi ρ bagi Y dan Z.

(30 markah)

4. (a) Katakan $X_1, X_2, \ldots X_n$ adalah sampel rawak dari suatu populasi Binomial $(1, p)$, $0 < p < 1$. Takrifkan

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots. + X_n}{n}, \text{ dapatkan}$$

(i) nilai yang mungkin bagi $\bar{X}$,

(ii) taburan bagi $\bar{X}$.

(40 markah)

(b) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ialah suatu sampel rawak daripada taburan N(0, 1).

Takrifkan $\bar{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i$ dan $\bar{X}_{n-k} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} X_i$

Dapatkan

(i) taburan bagi $\frac{1}{2}(\bar{X}_k + \bar{X}_{n-k})$,

(ii) taburan X_1^2/X_2^2 ,

(iii) f.k.k. bagi $U = \frac{X_1}{X_2}$.

(60 markah)

5. (a) X_1, X_2 adalah sampel rawak dari populasi yang bertaburan Khi-kuasa dua dengan 2 darjah kebebasan. Di beri

$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2) \text{ dan}$$
$$Y_2 = X_2 .$$

Dapatkan f.k.k. bagi Y_1 .

...5/-

(b) Di beri $X \sim$ Gamma (n, λ).

(i) Dapatkan ungkapan bagi momen ke n bagi p.r. ini.

(ii) Andaikan $n = 2$, $\lambda = 0.25$, gunakan (i) untuk mendapatkan min dan varians bagi $Y = X(X - 1)$.

(30 markah)

(c) Diberi $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{a}}{2\pi} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}(x^2 + ay^2 - 2bx + b^2)\right\}$

$$-\infty < x < \infty$$
$$-\infty < y < \infty,$$

adakah X dan Y bersandar ? Terangkan.

(30 markah)

1) Fungsi gamma $\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$

...7/-

Taburan	Parameter	Fungsi Jisim Kebarangkalian	Fungsi Penjana Momen	Min	Varians
Bernoulli	p	$p_X(x) = \begin{cases} q, & x=0 \\ p, & x=1 \end{cases}$	$pe^t + q$	p	pq
Binomial	n, p	$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ x = 0, 1, 2, \ldots n. \end{cases}$	$(pe^t + q)^n$	np	npq
Hiporgeometri	n, N, K	$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\ x = 0, 1, 2, \ldots n \end{cases}$	-	$\frac{nk}{N}$	$\frac{nK(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$
Geometri	p	$p_X(x) = \begin{cases} q^{x-1} p, \\ x = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$	$\frac{pe^t}{1 - qe^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Negatif Binomial	r, p	$p_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \\ x = r, r+1, r+2, \ldots \end{cases}$	$\left(\frac{pe^t}{1 - qe^t}\right)^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Poisson	λ	$p_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ x = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$	$e^{\lambda(e^t - 1)}$	λ	λ

Jadual 3.7

...8/-

Taburan	Fungsi Ketumpatan Kebarangkalian	Parameter	Min	Varians	Fungsi Penjana Momen
Seragam	$\frac{1}{b - a}$, $a < x < b$	$-\infty < a < b < \infty$	$\frac{a + b}{2}$	$\frac{(b - a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b - a)t}$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x - \mu)^2/2\sigma^2}$ bagi $-\infty < x < \infty$	$-\infty < \mu < \infty$ $\sigma > 0$	μ	σ^2	$e^{(\mu t + \sigma^2 t^2/2)}$
Eksponen	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$\lambda > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$, $t < \lambda$
Gamma	$\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$\lambda > 0$ $n > 0$	n/λ	n/λ^2	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$, $t < \lambda$
Khi Kuasa Dua	$\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2 - 1} e^{-x/2}$	$\nu = 1, 2, 3, \ldots$	ν	2ν	$\left(\frac{1}{1 - 2t}\right)^{\nu/2}$, $t < 1/2$
Beta	$\frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1 - x)^{b-1}$ bagi $0 < x < 1$	$a > 0$ $b > 0$	$\frac{a}{a + b}$	$\frac{ab}{(a + b + 1)(a + b)^2}$	tidak berguna

Rajah 4.19