UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1991/92

Jun 1992

JAM 241 - Persamaan Pembezaan/Ruang Vektor

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab SEMUA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira elektronik boleh digunakan.

...2/-

1. Persamaan pembezaan

$$x^2y'' + xy' - (4 + x)y = 0 \;..... \;(*)$$

mempunyai penyelesaian bersiri

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad a_0(r) = 1 \; .$$

(a) Tunjukkan $x = 0$ adalah titik singular sekata bagi (*).

(b) Tentukan dua eksponen r_1 dan r_2 dalam penyelesian bersiri tersebut.

(c) Dapatkan hubungan jadi semula bagi (*).

(d) Tunjukkan

$$y_1(x) = x^2 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4!}{n!(n+4)!} x^n \right\}$$

merupakan satu penyelesaian bagi (*).

(e) Tunjukkan bahawa penyelesaian kedua mengambil bentuk

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n-2}$$

di mana $B_n = \left. \frac{da_n}{dr} \right|_{r=-2}$.

(100 markah)

...3/-

2. Diberi persamaan Legendre peringkat α

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \quad , \quad \alpha \text{ pemalar} \quad .... (*).$$

(a) Tunjukkan $x = 0$ adalah titik biasa bagi (*).

(b) Dengan menganggap penyelesaian bersiri bagi (*) mengambil bentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dapatkan dua penyelesaian tak bersandar linear y_1 dan y_2.

(c) Tunjukkan bahawa persamaan Legendre (*) boleh ditulis dalam bentuk

$$[(1 - x^2)y']' = -\alpha(\alpha + 1)y \quad ... \quad (**).$$

Jika $P_n(x)$ dan $P_m(x)$ memenuhi (**), tunjukkan bahawa

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x) dx = 0 \quad , \quad m \neq n .$$

(100 markah)

3. Pertimbangkan sistem persamaan pembezaan $\frac{dx}{dt} = Ax$ di mana

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ dan } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Cari tiga penyelesaian yang tak bersandar linear.

(b) Tuliskan suatu matriks penyelesaian asasi.

...4/-

(c) Selesaikan masalah nilai awal

$$\frac{dx}{dt} = Ax \;, \; X(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(100 markah)

4. (a) Tunjukkan bahawa suatu ruang vektor mempunyai hanya satu unsur sifar.

(20 markah)

(b) Tunjukkan sama ada set semua unsur dari $\mathbb{R}^2$ dalam bentuk $(a, -a)$, $a \in \mathbb{R}$ adalah subruang dari $\mathbb{R}^2$.

(30 markah)

(c) Biarkan $\tilde{x}$ dan $\tilde{y}$ merupakan unsur yang tak bersandar linear dari suatu ruang vektor. Jika $\tilde{u} = a\tilde{x} + b\tilde{y}$ dan $\tilde{v} = c\tilde{x} + d\tilde{y}$, tunjukkan $\tilde{u}$ dan $\tilde{v}$ tak bersandar linear jika dan hanya jika $ad - bc \neq 0$.

(50 markah)

5. (a) Cari hubungan di antara a, b dan c supaya $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ terkandung di dalam suatu ruang yang direntang oleh

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

(30 markah)

(b) Tentukan dimensi bagi ruang vektor di bawah:

$$\{(a, 3a + c, 5a - 2c, 0 \mid a, c \in R^4 \}.$$

(30 markah)

...5/-

(c) Jika $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

merentang R^3 , tunjukkan bahawa

$$\hat{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset S \text{ ialah}$$

suatu asas bagi R^3.

(40 markah)

oooOooo