UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang 1991/92

Jun 1992

JAM 231 - Kalkulus Lanjutan

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira elektronik boleh digunakan.

---

1. (a) Dengan menggunakan takrif ε - δ, buktikan

(i) $\lim\limits_{x \to -1/2} (4x + 6) = 4$ (had)

(ii) $\underset{x \to 1}{\text{had}}\ (4x^2 - 3x + 1) = 2$

(30 markah)

(b) Cari nilai had jujukan berikut apabila $n \to \infty$

(i) $\left\{ 2^{-1\sqrt{n}} \right\}$

(ii) $\left\{ \dfrac{n}{3^n} \right\}$

(iii) $\left\{ \dfrac{n^n}{n!e^n} \right\}$

(30 markah)

(c) Pertimbangkan $f(x) = \dfrac{\ell n\ x}{x}$. Bincangkan domain f, titik genting, titik maksimum atau minimum, selang f menaik atau menyusut, selang f cekung ke atas atau ke bawah, titik lengkok balas dan juga asimptot. Seterusnya lakarkan f.

(40 markah)

2. (a) (i) Nyatakan Teorem Rolle dan Teorem Nilai Min.

(ii) Buktikan Teorem Nilai Min dengan menggunakan keputusan Teorem Rolle.

(iii) Jika $b > 1$, buktikan

$$b - 1 < b \quad n\, b < b(b - 1).$$

(40 markah)

(b) Bincangkan keseragaman fungsi $\left\{\dfrac{nx}{1 + n^2x^2}\right\}$ pada selang

(i) $\{-1 \leq x \leq 1\}$

(ii) $\{1 \leq x \leq 2\}$.

(40 markah)

(c) Katakan $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi} x \tan^{-1} nx$.

Cari $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$ dan

(20 markah)

3. (a) Jujukan $\{a_n\}$ ditakrifkan seperti berikut:

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{2 + a_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Tunjukkan bahawa jujukan ini menumpu dan cari $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(30 markah)

(b) Diberi $f_n(x) = nx^n(1 - x)$, $x \in [0, 1]$ dan $n \in \mathbb{N}$. Cari fungsi had f, di mana $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Tunjukkan bahawa jujukan fungsi $\{f_n(x)\}$ tidak menumpu secara seragam pada [0, 1]. Cari nilai kamiran

$$\int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{dan} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

(30 markah)

(c) Untuk pernyataan berikut, buktikan jika benar atau sangkalkan dengan memberi sebarang contoh lawan jika ia salah:

$f_n(x)$ adalah fungsi yang selanjar pada [a, b], bagi semua $n \in \mathbb{N}$. Jika $\{f_n(x)\}$ tidak menumpu seragam pada [a, b], maka

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

(40 markah)

4. (a) Buktikan teorem berikut:

Katakan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dua siri dengan sebutan-sebutan positif dan

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$.

(i) Jika $\ell \neq 0$ atau ∞, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ menumpu $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ menumpu.

(ii) Jika $\ell = 0$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ menumpu, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ menumpu

(iii) Jika $\ell = \infty$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mencapah, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mencapah.

(40 markah)

(b) Buktikan bahawa jika $a \neq 0$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a \frac{1}{n^p}$ menumpu jika dan hanya jika $p > 1$.

(20 markah)

(c) Tentukan sama ada setiap siri berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 4}{2^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell n(n + 100)}$

(20 markah)

(d) Cari semua nilai x supaya siri

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^n$$

menumpu.

(20 markah)

5. (a) Buktikan teorem berikut:

Katakan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ adalah suatu siri kuasa dan R adalah jejari penumpuannya.

(i) Katakan $\underset{n\to\infty}{\text{had}} |c_n|^{1/n} = p.$

Jika $p \neq 0$, maka $R = 1/p$.
Jika $p = 0$, maka $R = \infty$.

(ii) Katakan $\underset{n\to\infty}{\text{had}} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = q.$

Jika $q \neq 0$, maka $R = \frac{1}{q} = \underset{n\to\infty}{\text{had}} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$

Jika $q = 0$, maka $R = \infty$.

(50 markah)

(b) Dengan menggunakan ujian - M Weierstrass, tunjukkan bahawa siri fungsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$$

menumpu secara seragam pada selang [1, 2].

Jika $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx},\ 1 \le x \le 2$, cari $\int_1^2 f(x)\, dx$.

(50 markah)

ooooooOoooooo