

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Tambahan
Sidang Akademik 1991/92

Jun 1992

JAM 221 - Kalkulus II

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab SEMUA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

1. (a) Bagi sebarang vektor \underline{u} dan \underline{v} , tunjukkan bahawa

$$|\underline{u} + \underline{v}| \leq |\underline{u}| + |\underline{v}|.$$

Bilakah $|\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u}| + |\underline{v}|$?

(12 markah)

- (b) Cari satu vektor unit yang berserenjang dengan vektor

$$\underline{u} = 3\underline{i} - \underline{j} + 8\underline{k} \text{ dan } \underline{v} = \underline{i} - 2\underline{k}.$$

(12 markah)

- (c) Tentusahkan bahawa $y_1 = e^{-2x}$, dan $y_2 = e^{3x}$ membentuk set penyelesaian asasi bagi persamaan

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

(12 markah)

- (d) Nyatakan teorem kewujudan - keunikan bagi masalah nilai awal

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = h(x), x \in I,$$

$$y(x_0) = \alpha,$$

$$y'(x_0) = \beta,$$

dengan α dan β sebagai pemalar dan $x_0 \in I$.

(12 markah)

- (e) Diberi $x = 3r - 5s$ dan $y = 2r + s$. Jika u ialah fungsi r dan s , tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{13} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - 2 \frac{\partial u}{\partial s} \right).$$

(13 markah)

...3/-

(f) Nilaikan

$$\frac{d}{dt} \int_1^t \frac{1}{x} \sin \frac{\pi t}{x} dx, t > 0.$$

(13 markah)

(g) Lakarkan bongkah di atas satah $z = 0$ yang dibatasi oleh satah $x = 0, y = 0, y = 2x$ dan permukaan $x^2 + z^2 = 9$.

(12 markah)

(h) Ketiga-tiga kamiran terlelar di bawah boleh digunakan untuk mengira isipadu bongkah di dalam soalan (g). Letakkan had masing-masing.

(i) $\iiint dx dy dz$.

(ii) $\iiint dz dx dy$.

(iii) $\iiint dx dz dy$.

(14 markah)

2. (a) (i) Pertimbangkan persamaan pembezaan

$$ay''(x) + by'(x) + c = 0,$$

dengan a, b dan c sebagai pemalar dan $a \neq 0$. Sekiranya persamaan ciriannya mempunyai punca nyata dan berulang, dapatkan set penyelesaian asasi persamaan pembezaan ini. Seterusnya tuliskan penyelesaian amnya.

(ii) Selesaikan persamaan pembezaan

$$y'' - 3y' - 10y = 7e^{-2x} + 10 \sin x.$$

(50 markah)

...4/-

- (b) (i) Pertimbangkan persamaan Euler

$$\alpha x^2 y''(x) + \beta xy'(x) + \gamma y(x) = g(x),$$

dengan α , β dan γ sebagai pemalar, $\alpha \neq 0$ dan $x > 0$.

Melalui penggantian $x = e^z$ tunjukkan bahawa

$$\begin{aligned} xy'(x) &= y'(z) \quad \text{dan} \\ y''(x) &= \frac{1}{x^2} [y''(z) - y'(z)]. \end{aligned}$$

Seterusnya turunkan persamaan Euler ini kepada persamaan pembezaan linear peringkat kedua dengan koefisien malar.

- (ii) Selesaikan

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = \ln x, \quad x > 0.$$

(50 markah)

3. (a) (i) Diberi $w = f(x, y)$. Melalui penggantian $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$ tunjukkan bahawa

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= -\frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta \end{aligned} \right\} \text{(A)}$$

- (ii) Selesaikan sistem persamaan (A) di atas untuk memperolehi

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{di dalam sebutan} \quad \frac{\partial w}{\partial r} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

- (iii) Seterusnya tunjukkan bahawa

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

(50 markah)

...5/-

- (b) Dengan menggunakan kaedah Lagrange, dapatkan nilai maksimum bagi

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$$

serta mematuhi syarat-syarat

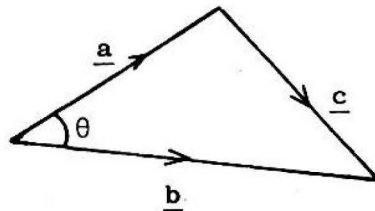
$$x + y + z = 1, \quad x + y - z = 0.$$

(50 markah)

4. (a) (i) Kira sudut di antara dua satah $2x - y - 2z - 5 = 0$ dan $6x - 2y + 3z + 8 = 0$.
- (ii) Titik-titik $(2, 0, 5)$ dan $(0, 2, -1)$ terletak di atas satu satah. Sekiranya satah ini berserenjang dengan satah $x + 3y - z - 7 = 0$, dapatkan persamaannya.

(40 markah)

- (b) Rujuk kepada rajah 1.



Rajah 1

Melalui kaedah vektor, buktikan bahawa

$$|\underline{c}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - 2|\underline{a}||\underline{b}| \cos \theta.$$

Jika \underline{a} dan \underline{b} vektor unit, tunjukkan bahawa $|\underline{c}| = 2 \sin \frac{\theta}{2}$.

(30 markah)

...6/-

- (c) Diberi dua vektor malar \underline{a} dan \underline{b} . Dapatkan vektor \underline{r} supaya

$$\underline{r} \times \underline{a} + \underline{r} = \underline{b}.$$

(30 markah)

5. (a) Nilakan

(i)
$$\int_0^1 \int_x^\pi \sin(y^2) \, dy \, dx;$$

(ii)
$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy,$$

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\};$$

(iii)
$$\int_1^2 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{dz \, dx \, dy}{x^2 + y^2 + z^2}$$

(60 markah)

- (b) Nilakan

$$\iint_S e^{-(x^2 + y^2)} \, dx \, dy,$$

S ialah keseluruhan sukuan pertama. Seterusnya tunjukkan

(i)
$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

(ii)
$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

(40 markah)

oooOooo