LAPORAN
PROJEK TAHUN AKHIR

THE STUDY OF HOLLOW RECTANGULAR SUBJECTED TO TORSIONAL FORCE

OLEH :

Intan Fadhlina Mohamed

Disertasi ini dikemukakan kepada
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Sebagai memenuhi sebahagian daripada syarat keperluan untuk ijazah dengan kepujian

SARJANA MUDA KEJURUTERAAN
(KEJURUTERAAN MEKANIK)

Januari 2000

Pusat Pengajian Kejuruteraan Mekanik
Universiti Sains Malaysia

PRAKATA

Projek tahun akhir adalah penting bagi seseorang mahsiswa kerana ia melambangkan kemampuan, keupayaan, kebolehan dan kreativiti di samping menggunakan segala ilmu yang diperolehi sewaktu sesi kuliah bagi menghasilkan kerja yang baik dan sempurna hasil dari titik peluh sendiri. Ia juga menuntut mahasiswa menjalankan kajian yang lebih terperinci, rujukan, eksperimen dan mempelajari sendiri ilmu yang tidak dipelajari di dewan kuliah. Ini secara tidak lansung dapat melatih mahasiswa dan meningkatkan semangat mahasiswa untuk menuntut ilmu walaupun di luar dewan kuliah. Di samping itu, projek tahun akhir juga memberi persediaan awal kepada para pelajar untuk berdikari sebelum mereka memikul tanggungjawab yang lebih penting apabila menempuh alam pekerjaan nanti.

Ketepatan dan kepadatan laporan yang disediakan oleh pelajar dapat mencorakkan laporan yang perlu ada pada seorang jurutera. Dikesempatan yang ada ini saya ingin mengambil peluang untuk mempersembahkan kesemua idea, cara kerja atau kaedah, analisa dan kesimpulan yang dapat dibuat untuk projek ini agar laporan yang disediakan dapat menepati objektif sebenar dan dapat dijadikan panduan serta rujukan dikemudian hari. Sewajarnya setiap mahasiswa mempunyai keazaman yang tinggi untuk berusaha menambahkan ilmu pengetahuan. Segala cita-cita yang ingin dicapai perlulah disertai dengan ilmu pengetahuan yang tinggi bagi memastikan kita mendapat pulangan yang diinginkan. Diharapkan mahasiswa hari ini dapat membawa pembaharuan yang cukup mantap bagi meletakkan negara Malaysia setaraf dengan negara maju di mata dunia.

ABSTRAK

Kajian terhadap ubahbentuk sesuatu bahan biasanya boleh dibuat daripada berbagai perspektif. Salah satu daripadanya adalah ubahbentuk kilasan yang disebabkan oleh momen kilasan pada arah-arah tertentu. Projek ini membincangkan analisis ke atas nilai kilasan yang dikenakan pada satu rasuk terjulur (cantilever beam). Tujuan analisa ini adalah untuk menentukan nilai kilasan yang dikenakan ke atas suatu rasuk dengan menggunakan kaedah elemen terhingga (finite element method). Keputusan yang diperolehi dibandingkan pula dengan keputusan menggunakan kaedah analogi membran (membrane analogy).Kaedah elemen terhingga adalah satu kaedah yang sesuai untuk kebanyakan keadaan yang melibatkan bahagian yang agak kritikal berbanding kaedah lain yang agak terhad penggunaannya.

Suatu bentuk sistem yang umum iaitu sebatang aci padu bermuka rentas segiempat sama dijadikan model rujukan untuk analisis yang dijalankan. Kemudian, analisa untuk kes yang lebih kompleks iaitu aci padu ditukarkan kepada aci berongga dilakukan. Terdapat keadaan kritikal yang perlu dipertimbangkan bagi membuat analisa keatas aci berongga dengan membuat beberapa andaian yang diperlukan. Seterusnya, pengiraan dilakukan untuk kes rasuk terjulur bermuka rentas segitiga.Pengaturcaraan komputer menggunakan program FORTRAN ditulis dalam analisis ini bagi menentukan nilai kilasan bertujuan untuk meningkatkan kecekapan dan menjimatkan masa membuat pengiraan.

ABSTRACT

Research of deflection in materials always done in such perspective. One of them is torsion deflection, which is caused by twisting moment at any place. This project discussed about the analysis of twisting moment, which is subjected to the cantilever beam or shaft. The purpose of the project is to determine the torsion value, which is subjected to the beam using the finite element method. The result from this method is compared to the other method; membrane analogy method. The finite element method is the most suitable method to be used compared to the others if there is any critical section.

A general system, which is a rectangular cross-sectional shaft is taken into the analysis as a model. The analysis is furthered considering the more complex section, where the solid shaft is shifted to the hollow shaft. The analysis needed to be done by making assumptions in the critical section. Next, the calculation is done for the triangular cross-sectional beam. The computer program is written using FORTRAN to determine the value of twisting moment. The purpose of the program is to increase efficiency and to reduce time for doing the calculation.

KANDUNGAN

1.0 PENGENALAN

1.1 PENDAHULUAN

Mekanik pepejal merupakan gabungan ilmu fizik dan matematik. Pencapaian yang begitu hebat telah dikemukakan oleh pernyataan Hukum Newton. Keperluan untuk mengkaji dan memahami teknik-teknik utama berlakunya keretakan dalam pepejal merupakan satu motivasi utama kepada para saintis terdahulu walaupun ia merupakan satu cabang yang baru untuk dikaji. Kajian yang dilakukan adalah berhubungkait dengan daya-daya yang mungkin bertindak seperti daya kilasan(torsion), daya lenturan(bending) dan sebagainya.

Bermula dengan kajian awal yang dilakukan oleh Leonardo Da Vinci yang telah membuat beberapa andaian teknik ujian yang mungkin untuk menentukan kekuatan sisi bagi satu wayar. Seterusnya kajian dilakukan oleh Galileo keatas satu rod yang dikenakan daya yang menyebabkan rod patah dan merekodkan konsep tegasan yang berkadaran dengan panjang dan luas keratan rentas.

Pada awal 1700an dan 1800an , wujudlah satu teori yang amat penting iaitu teori struktur elastik berelemen mudah. Seterusnya teori ini dimajukan lagi oleh Euler yang mengemukakan satu teori rasuk sebagai model kepada satu garisan yang elastik.

Selama 200 tahun, minat terhadap teori rasuk telah ditunjukkan oleh para saintis lepas berasaskan konsep tegasan dan terikan. Teori-teori yang telah dikemukakan dapat membantu menyelesaikan masalah berkaitan rasuk termasuklah fenomena-fenomena yang mungkin terhadap kilasan ke atas suatu rasuk.

1.2 OBJEKTIF

Dalam membuat analisis terhadap kilasan satu rasuk terjulur berkeratan rentas segiempat sama, terdapat beberapa objektif utama yang perlu ditekankan bagi projek ini iaitu:

1. Mencari nilai kilasan yang dikenakan pada suatu rasuk padu.
2. Menukar rasuk padu kepada rasuk berongga juga rasuk berkeratan rentas segitiga kaki sama dan kilasan ditentukan.
3. Membuat pengaturcaraan komputer menggunakan FORTRAN 77 untuk menentukan nilai kilasan bagi rasuk terjulur.

Analisis ini meliputi sesuatu bidang yang luas. Penggarisan masalah adalah meliputi bidang-bidang seperti berikut:

1. Mekanik pepejal
2. Analisis berangka kaedah elemen terhingga
4. Matematik lanjutan
5. Pengaturcaraan FORTRAN

1.3 RANGKA KERJA PROJEK

Projek ini adalah berdasarkan analisis kejuruteraan yang meliputi ciri-ciri kilasan bagi sesuatu sistem tertentu. Oleh itu, suatu bentuk umum telah dipertimbangkan dalam analisis ini iaitu, sebatang rasuk terjulur dengan keratan rentas segiempat sama. Kesemua pemboleh ubah seperti:

1.Panjang rasuk, L(m)

2.Panjang dan lebar keratan rentas rasuk, a(m)

6.Modulus ricih, G(kg/cm^2)

7.Sudut kilasan, θ (^{0})

perlulah diketahui terlebih dahulu. Daripada nilai pemboleh ubah tersebut, dapatlah ditentukan nilai matrik kekakuan, K, bebanan dan anjakan, ϕ. Nilai ini akan diperolehi dalam bentuk matrik dan dengan menggunakan rumus, masalah kilasan bagi jasad tersebut akan dapat ditentukan.

Untuk masalah yang lebih kompleks, kes kedua dimana rasuk padu ditukarkan kepada rasuk berongga sebagai model seterusnya. Untuk kes ketiga, keratan rentas empat segi ditukarkan ke segitiga sama kaki. Rumusan masalah adalah seperti berikut:

- Membuat analisa terhadap daya kilasan
- Menentukan carakerja kaedah elemen terhingga serta membuat aplikasi terhadap kilasan supaya boleh dipadankan dengan pengaturcaraan komputer
- Memahami nilai-nilai yang mempengaruhi kilasan yang dikira
- Menentukan keadaan elemen yang perlu diambil untuk menyelesaikan masalah bagi kes yang dipilih
- Kelebihan menggunakan pengaturcaraan komputer berbanding penyelesaian secara manual
- Mengetahui asas serta mempelajari bahasa yang digunakan dalam perisian FORTRAN

1.4 SKOP KAJIAN

Analisis kilasan ini hanya dilakukan dengan andaian

(a) bahan adalah seragam keseluruhannya

(b) sudut kilasan adalah seragam disepanjang rasuk

(c) permukaan keratan rentas adalah rata

2.0 KAJIAN ILMIAH

2.1 PENDAHULUAN

Kilasan melibatkan pemindahan tenaga kinetik kepada tenaga keupayaan yang seterusnya tersimpan dalam rasuk. Momen kilasan boleh dikira melalui beberapa kaedah yang bersesuaian. Diantara kaedah yang sesuai ialah dengan menggunakan kaedah elemen terhingga atau kaedah analogi membran. Unit dan simbol yang biasa digunakan dalam analisis getaran ialah seperti berikut:

Unit SI sistem

Nama	Unit	Simbol
Panjang	Meter	M
Jisim	Kilogram	Kg
Masa	Saat	s
Sudut	Darjah	o

Dalam bidang kilasan, unit asas yang terlibat ialah

Nama	Unit	Simbol
Modulus kekakuan	Kilogram per meter kuasa dua	Kg/m^2

2.2 KAEDAH MATRIK

Analisis kilasan menggunakan kaedah elemen terhingga memerlukan konsep pengoperasian matematik. Matrik adalah bahasa matematik yang paling mudah untuk membuat analisis terhadap nilai anjakan yang bilangannya lebih daripada satu. Pengkomputeran dengan matrik boleh menyelesaikan masalah yang rumit dan komplek dengan cepat dan mudah.

2.2.1 Operasi Matrik

(a) Penambahan dan penolakan matrik

Untuk dua matrik, A dan B, kedua-duanya dengan saiz yang sama(m*n), penambahan dan penolakan matrik adalah seperti berikut:

$C = A+B$ dengan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$D = A - B$ dengan $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

(b) Pendaraban skala

$$\lambda A = \lfloor \lambda a_{ij} \rfloor$$

(c) Pendaraban matrik

Untuk matrik A(n*m) dan B(m*g), hasil darab AB adalah:

$C = AB$ dengan $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$

Dimana i= 1,2,……,n; j= 1,2,…….,g.

Pada amnya, $AB \neq BA$ tetapi, (AB)C = A(BC)

(d) Matrik transpos

Jika $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, maka matrik transpos bagi A ialah $A^T = [a_{ji}]$

Perhatikan bahawa $(AB)^T = B^T A^T$

(e) Matrik simetri

Matrik segiempat A,(n*n), dikatakan simetri apabila $A = A^T$ atau $a_{ij} = a_{ji}$

(f) Matrik Identiti

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Perhatikan AI = A, IX = X.

(g) Matrik penentu

Penentu bagi matrik empat segi A< ialah satu nombor skala dan ditandakan dengan ‘det A’ atau $|A|$. Untuk matrik 2*2 dan 3*3, penentunya diberikan sebagai berikut:

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \quad \text{dan}$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

(h) Matrik singular

Suatu matrik dikatakan singular apabila det A = 0

(i) Matrik songsang

Bagi suatu matrik segiempat dan tidak singular,A dimana (det A $\neq 0$), songsangan A^{-1} adalah ditunjukkan seperti dibawah:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Matrik kofaktor,C, bagi A adalah $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ dimana M_{ij} adalah penentu bagi matik yang lebih kecil yang diperolehi daripada penghapusan baris ke-i dan lajur ke-j daripada matrik A.

Maka, songsangan bagi matrik A boleh ditentukan dengan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$$

Jika dilihat, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Jika det A = 0 (A ialah matrik singular), maka A^{-1} tidak wujud.

(j) Teknik penyelesaian untuk persamaan sistem yang linear

- Kaedah penghapusan Gauss

(k) Pembezaan dan pengamiran matrik

Katakan $A(t) = [a_{ij}(t)]$

Maka pembezaan, $\dfrac{dA(t)}{dt} = \left[\dfrac{da_{ij}(t)}{dt}\right]$ dan

Pengamiran, $\int A(t)dt = \left[\int a_{ij}(t)dt\right]$

(l) Kaedah penghimpunan matrik

Contoh:

Elemen 1,

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix}$$

Elemen 2,

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

dimana;

k = matrik kekakuan,

u = matrik anjakan,

f = matrik daya

Himpunan matrik kekakuan untuk keseluruhan sistem :

Pertimbangkan keseimbangan daya

Nod 1,

$$F_1 = f_1^1$$

Nod 2,

$$F_2 = f_2^1 + f_1^2$$

Nod 3,

$$F_3 = f_2^2$$

dimana

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1 u_1 - k_1 u_2 \\ F_2 &= -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3 \\ F_3 &= -k_2 u_2 + k_2 u_3 \end{aligned}$$

Dalam bentuk matrik,

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

atau

KU = F

Penambahan dua persamaan matrik (superposisi),

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

Persamaan dengan menggunakan konsep keseimbangan daya adalah sama seperti persamaan yang telah dihasilkan di atas.

(m) Keadaan sempadan dan beban:

Anggapan: $u_1 = 0$ dan $F_2 = F_3 = P$

Diketahui;

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ P \end{Bmatrix}$$

yang akan menyebabkan keadaan matrik terubah kepada

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix} \text{ dan}$$

$F_1 = -k_1 u_2$

Pembolehubah adalah

$$U = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \text{dan daya tindakbalas } F_1 \text{ (jika dikehendaki)}$$

Penyelesaian persamaan adalah

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P/k_1 \\ 2P/k_1 + P/k_2 \end{Bmatrix} \text{dan } F_1 = -2P$$

2.3 KAEDAH ANALOGI MEMBRAN

Kaedah analogi membran adalah bertujuan untuk mencari nilai kilasan pada rasuk tidak bebulat. Dalam penyelesaian masalah kilasan, 'fungsi tegasan' yang dipanggil 'fungsi tegasan Prandt', $\Phi(x, y)$ biasanya digunakan. Dengan andaian Z_{xy} dan $Z_{yz} \neq 0$, maka persamaan keseimbangan untuk masalah kilasan dapat dipenuhi jika

$$\frac{\delta Z_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta Z_{yz}}{\delta y} = 0 \text{ ……………..(1)}$$

Persamaan tersebut telah dikenalpasti dapat dipenuhi jika Z_{xz} dan Z_{yz} diterbitkan daripada fungsi tegasan, $\Phi(x, y)$. Maka

$$Z_{xz} = \frac{\delta \Phi}{\delta y}, Z_{yz} = -\frac{\delta \Phi}{\delta x} \text{ ………..(2)}$$

Dengan menggunakan kesesuaian hubungan tegasan-terikan, persamaan yang bersesuaian adalah diberi sebagai

$$\frac{\delta Z_{zx}}{\delta y} - \frac{\delta Z_{zy}}{\delta x} = H \text{ ……………..(3)}$$

dimana H= - 2Gα

G= Modulus ricihan

α= sudut kilasan

Dengan menggantikan persamaan (2) ke dalam (3), maka persamaan yang terhasil adalah persamaan Poisson.

$$\frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y^2} = H \text{ ……………..(4)}$$

Apabila dilihat pada membran filem sabun yang nipis, perbandingan boleh dilakukan di antara filem tersebut dengan kilasan. Formula berikut membayangkan filem nipis tersebut.

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 Z}{\delta y} = \frac{P}{s} \text{ ………………(5)}$$

Z=perubahan jarak memban (Z=0 pada sempadan)

P=tekanan lateral

S=daya tegangan per unit panjang membran

Persamaan ini dapat dibandingkan dengan persamaan (4) untuk menerangkan analogi yang boleh dilakukan. Persamaan ini dipanggil ‘analogi membran sabun Prandt’. Analogi yang dibuat ialah:

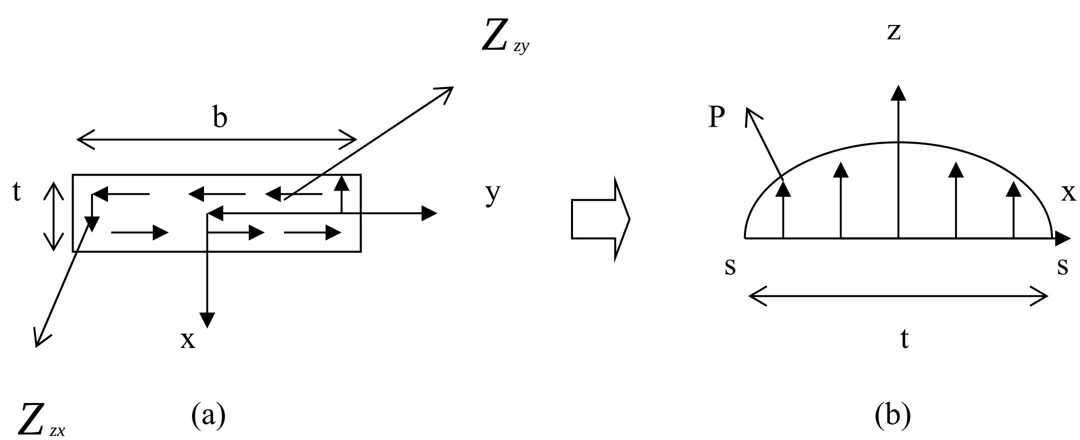
a) Kecerunan membran sabun adalah berkadar terus dengan tegasan ricihan dalam kilasan
b) Isipadu dibawah membran sabun berkadaran dengan jumlah tork

Jadual dibawah menunjukkan persamaan diantara analogi membran dan kilasan.

Membran	Kilasan
Z	Φ
1/s	G
P	2
$-\frac{\delta Z}{\delta x}, \frac{\delta Z}{\delta y}$	Z_{zy}, Z_{zx}
2*(isipadu dibawah membran)	T

2.3.1 Keratan Rentas Segiempat

Menggunakan kaedah analogi membran, pada satu bar dengan keratan rentas empat segi seperti rajah 2.1(a), iaitu ketebalan adalah kecil berbanding lebar, ia diandaikan seperti berbentuk membran bebulat pada keseluruhan dimensi pada rajah 2.1(b) :



Rajah 2.1

Oleh itu,

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 0, \quad \textit{persamaan 5 diturunkan kepada} \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = -\frac{P}{s}$$

iaitu ia dikamirkan sebanyak 2 kali untuk memperolehi persamaan parabolik.

Maka,

Z=P/2s [(t/2)^2 – x^2]……………(6) $z = \frac{1}{2}\frac{P}{s}\left[(\frac{t}{2})^2 - x^2\right]$ $z = \frac{1}{2}\frac{P}{s}\left[(\frac{t}{2})^2 - x^2\right]$

dengan keadaan sempadan

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 0 \;\; pada \;\; x = 0 \;\; dan \;\; z = 0 \;\; pada \;\; x = \frac{t}{2}$$

Isipadu yang terjana dalam persamaan (6) adalah

$$V = \frac{Pbt^3}{12s}$$

Untuk analogi membran, daripada jadual,

$$T = 2V = \frac{1}{3}bt^3G\alpha$$

ketegasan kekakuan kilasan,

$$c = \frac{T}{\alpha} = \frac{1}{3}bt^3G = JeG$$

dimana Je adalah momen inersia berpolar

$$Z_{zy} = -\frac{\delta z}{\delta x} = 2G\alpha x$$

$$\alpha = \frac{3T}{bt^3G}$$

Ricihan maksimum wujud pada $\pm\frac{t}{2}$ *iaitu*

$$\tau_{\max} = G\alpha t = \frac{3T}{bt^2} \quad \text{atau} \quad T = \frac{1}{3}bt^2\tau_{\max}$$

2.4 KESIMPULAN

Terdapat banyak sistem yang menggunakan rasuk terjulur sebagai sebahagian daripada komponen utamanya. Nilai kilasan yang tinggi kerap-kali menjadi masalah bagi sistem kerana ia boleh menyebabkan berlakunya keretakan ataupun kemusnahan sekiranya melebihi had kenyal bahan tersebut. Oleh itu, nilai kilasan perlu ditentukan bagi memastikan sistem berada dalam keadaan selamat. Nilai-nilai kilasan boleh dikirakan dengan menggunakan beberapa kaedah yang bersesuaian bergantung kepada keadaan rasuk dan bahan yang digunakan bagi memudahkan langkah-langkah penyelenggaraan dapat dilakukan terlebih dahulu sebelum kejadian yang tidak diingini berlaku.

3.0 KAEDAH ELEMEN TERHINGGA

3.1PENGENALAN

Dalam analisis kejuruteraan, terdapat dua subjek yang penting untuk dipertimbangkan. Analisis dibuat dengan mengenalpasti asas yang menerangkan kelakuan sesuatu sistem dan menterjemahkan asas tersebut kepada model matematik yang mellibatkan persamaan yang boleh diselesaikan dengan membuat anggapan yang tepat secara kualitatif dan kuantitatif terhadap sistem.

Idea asas dalam kaedah elemen terhingga ialah untuk mencari penyelesaian bagi masalah yang rumit dengan menukarkannya kepada masalah yang mudah dam boleh diselesaikan. Oleh kerana masalah sebenar digantikan dengan masalah yang lebih mudah untuk mendapatkan penyelesaian, penyelesaian yang terhasil merupakan suatu nilai penghampiran berbanding nilai sebenar. Penyelesaian matematik tidaklah memadai untuk mencari penyelesaian sebenar dalam semua masalah praktikal. Maka, dengan ketiadaan mana-mana kaedah yang sesuai untuk mencari penyelesaian penghampiran bagi masalah yang diberi, kaedah alternatif yang lain ialah dengan menggunakan kaedah elemen terhingga. Tambahan pula dalam kaedah elemen terhingga, ia biasanya adalah lebih logik untuk mencari semua atau memperbaiki penyelesaian penghampiran dengan menggunakan keupayaan pengiraannya. Walaupun kaedah elemen terhingga hanya baru diperkenalkan, namun konsep asasnya telah digunakan pada masa yang lalu.

Dalam kaedah ini,bahagian penyelesaian diandaikan dengan pembentukan atau pembahagian elemen kepada bahagian elemen yang kecil dan bersambungan dipanggil elemen terhingga. Pada asalnya, kaedah elemen terhingga telah dimajukan untuk analisis keatas struktur kapal terbang. Bagaimana pun, teori amnya menjadikan kaedah ini boleh diaplikasikan secara meluas dan digunakan untuk pelbagai nilai keadaan sempadan dalam masalah kejuruteraan. Nilai keadaan sempadan dalam satu penyelesaian yang suba dicari adalah domain atau keadaan bahagian yang perlu dipenuhi (pada sisi) dengan mempertimbangkan perbagai perhubungan dan pembuktiannya.

3.2 TATACARA UMUM

Dalam kaedah elemen terhingga, keadaan asal sesuatu pepejal digambarkan sebagai persambungan rantaian pada nod atau titik nod. Nod biasanya terletak pada sempadan elemen yang bersambungan dengan elemen bersebelahannya. Oleh kerana keadaan perbezaan sebenar di dalam pepejal tidak diketahui, maka adalah diandaikan taburannya di dalam elemen terhingga boleh dihampirkan kepada fungsi mudah. Fungsi penghampiran dikenalpasti sebagai nilai bagi kawasan di dalam yang di sempadani oleh nod-nod. Apabila persamaan pada lapangan seperti persamaan keseimbangan pada keseluruhan badan ditulis, pemalar-pemalar baru akan menjadi nilai nod bagi perubahan kawasan yang lain. Dengan menyelesaikan persamaan sesuatu kawasan dimana pada kebiasaannya adalah berbentuk persamaan matrik, nilai nod bagi perubahan kawasan akan diketahui. Apabila nilai-nilai ini diketahui, fungsi penghampiran dapat mengenalpasti kawasan yang lain pada elemen. Penyelesaian am bagi masalah dengan menggunakan kaedah elemen terhingga biasanya mengikut langkah-langkah yang tersusun aturannya. Merujuk kepada masalah struktur statik, prosedur untuk menyelesaikan masalah kaedah elemen terhingga boleh diterangkan seperti berikut:

Langkah 1: Menjadikan struktur diskrit

Bahagian keseluruhan struktur kepada bahagian-bahagian kecil elemen. Keseluruhan struktur tersebut perlu dibahagikan kepada elemen terhingga yang bersesuaian dengan mempertimbangkan faktor bilangan, jenis elemen, saiz dan kedudukan.

Langkah 2: Pemilihan model interpolasi dan anjakan yang bersepadanan

Penyelesaian bagi anjakan bagi struktur yang kompleks dibawah mana-mana tindakan daya tidak dapat dibuktikan. Oleh itu, andaian dibuat bagi penyelesaian yang sesuai bagi elemen untuk penyelesaian yang tidak diketahui. Penyelesaian andaian yang dibuat mestilah mudah untuk pengiraan dan ia mesti memuaskan tumpuan objektif sebenar. Pada amnya, penyelesaian atau model interpolasi diambil dalam bentuk polinomial.

Langkah 3: Pembuktian matrik kekakuan dan vektor bebanan.

Daripada model anjakan yang diandaikan, matrik kekakuan $[K^{(e)}]$ dan vektor bebanan $P^{(e)}$, bagi elemen "e" akan dibuktikan dengan menggunakan keadaan keseimbangan atau pembuktian asas yang sesuai.

Langkah 4: Penggabungan persamaan bagi elemen untuk mendapatkan persamaan keseimbangan keseluruhan.

Struktur yang dipertimbangkan adalah terdiri daripada beberapa elemen terhingga. Matrik kekakuan dan vektor bebanan bagi setiap elemen akan digabungkan dalam keadaan yang bersesuaian dan persamaan keseimbangan keseluruhan perlu ditulis seperti berikut:

$$[K]\ \phi = P$$

dimana [K] dipanggil gabungan matrik kekakuan, ϕ adalah vektor bagi anjakan nod-nod dan P adalah vektor bebanan bagi nod untuk struktur yang lengkap.

Langkah 5: Penyelesaian untuk anjakan bagi nod-nod yang tidak diketahui

Persamaan keseimbangan keseluruhan perlu diubah untuk pengurusan bagi keadaan sempadan masalah yang dipertimbangkan. Setelah penggabungan keadaan sempadan, persamaan keseimbangan boleh dinyatakan sebagai

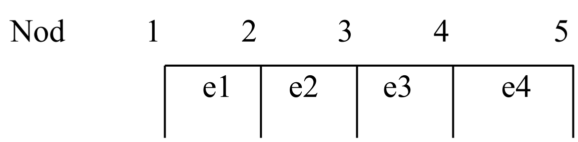
$$[K]\ \phi\ = P$$

Untuk masalah linear, vektor ϕ boleh diselesaikan dengan mudah. Tetapi untuk masalah yang tidak linear, penyelesaian perlu diperolehi dengan langkah yang terperinci dimana setiap langkah melibatkan modifikasi keatas matrik kekakuan [K] dan vektor bebanan P.

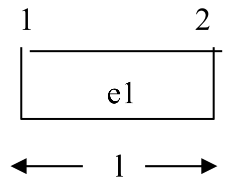
3.3 PERSAMAAN-PERSAMAAN ASAS

3.3.1 Pembuktian Fungsi Bentuk

Pertimbangkan satu rasuk melintang



Pertimbangkan elemen pertama, e1



nod	i	j
Koordinat	x_i	x_j
Anjakan	Ui	Uj

Untuk perubahan linear,

$U = \alpha_1 + \alpha_2 x$

Maka,

$Ui = \alpha_1 + \alpha_2 x_i$

$Uj = \alpha_1 + \alpha_2 x_j$

Dengan menyelesaikan kedua-dua persamaan,

$$\alpha_2 = \frac{U_j - U_i}{x_j - x_i}$$

$$\alpha_1 = \frac{U_i x_j - U_j x_i}{x_j - x_i}$$

Dengan memasukkan semula nilai α_2 dan α_1 ,

$$U = \frac{U_i x_j - U_j x_i}{x_j - x_i} + \frac{\lfloor U_j - U_i \rfloor x}{x_j - x_i}$$

$$= \frac{U_i \left[x_j - x\right]}{x_j - x_i} + \frac{U_j \left[x - x_i\right]}{x_j - x_i}$$

$$= U_i N_i + U_j N_j$$

$$= \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$$

Oleh itu, fungsi bentuk adalah:

$$N_i = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \quad ; \quad N_j = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

3.3.2 Pembuktian Matrik Terikan

Pertimbangkan terikan antara elemen, Exx

$$\frac{dU}{dx} = E_{\cancel{xx}} = U_i \frac{dN_i}{dx} + U_j \frac{dN_j}{dx}$$

$$dN_i = \frac{-1}{x_j - x_i} \qquad ; \qquad dN_j = \frac{1}{x_j - x_i}$$

$$= \frac{-1}{L} \qquad\qquad\qquad = \frac{1}{L}$$

$$\frac{dU}{dx} = U_i\left(\frac{-1}{L}\right) + U_j\left(\frac{1}{L}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$$

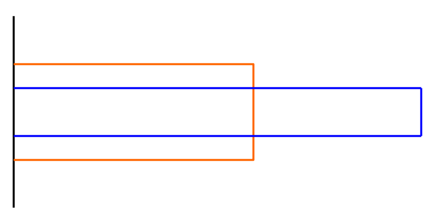
Oleh itu, terikan di antara elemen ialah:

$$E_{xx} = [B] \; \{U\}$$

Terikan dalam elemen bergantung kepada anjakan nod menerusi matrik [B] : matrik terikan.

3.3.3 Interpolasi Linear Polinomial dalam Sistem Koordinat Setempat

Pertimbangkan rasuk mengufuk dengan logam berlainan



0 i j

Sistem Koordinat Global xi xj

i j

Sistem Koordinat Setempat 0 x L

xi=0 xj=L

$$N_i = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \quad ; \quad N_j = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

$$N_i = \frac{L - x}{L - 0} = \frac{L - x}{L} = L_i \qquad N_j = \frac{x - 0}{L - 0} = \frac{x}{L} = L_j$$

$$N_i + N_j = 1$$

Membandingkan dengan sistem koordinat setempat, maka:

$$L_i + L_j = 1$$

Dapat diperhatikan bahawa,

$\int Li^a\, Lj^b\, dl = \{(a!\, b!)/ (a+ b+ 1)\}1$

$\int Ni^2\, dl = \int Li\, dl$

$\int Ni\, Nj\, dl = \int Li\, Lj\, dl$

Oleh itu,

$\int Li2\ dl = (2!\ 0!)\ L/\ (2+0+1)!$

$= 2!L/3!$

$= L/3$

$\int Li\ Lj\ dl = (1!\ 1!)\ L/\ (1+1+1)!$

$= L/3!$

$= L/6$

Sistem koordinat global mengesahkan bahawa,

$\int Ni2\ dl = \int_0^L (\ 1 - x/L)^2\ dl = \int_0^L (\ 1 - \ 2x/L + x^2/L^2)\ dl$

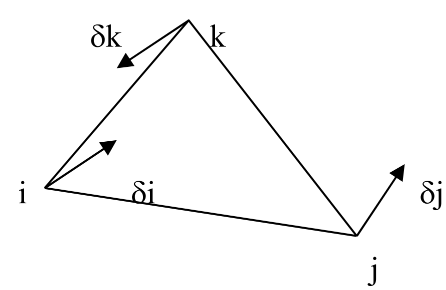
$= [\ x - x^2/L + x^3/3L^2]_0^L$

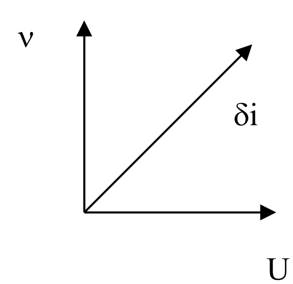
$= L - L^2/L + L^2/3L^2$

$= L/3$

Ini menunjukkan bahawa fungsi bentuk bagi sistem koordinat setempat adalah sama dengan sistem koordinat global.

3.3.5 Elemen Dua Dimensi(elemen linear)





Untuk elemen linear,

$\phi = \alpha_1 + \alpha_2\ x + \alpha_3\ y$

$$\delta = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}$$

$$\delta = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix}$$

dengan U = Ni Ui + Nj Uj + Nk Uk

V = Ni Vi + Nj Vj + Nk Vk

$$\delta = \begin{Bmatrix} N_i U_i + N_j U_j + N_k U_k \\ N_i V_i + N_j V_j + N_k V_k \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix}$$

$$= [N]\{\delta\}$$

$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_j\, x + c_i y)$

$N_j = \frac{1}{2A}(a_j + b_j\, x + c_j y)$

$N_k = \frac{1}{2A}(a_k + b_k\, x + c_k y)$

Dimana matrik penentu bagi 2A adalah;

$$2A = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & yk \end{vmatrix}$$

$a_i = x_j y_k - x_k y_j$; $b_i = y_j - y_k$; $c_i = x_k - x_j$;

$a_j = x_k y_i - x_i y_k$; $b_j = y_k - y_i$; $c_j = x_i - x_k$;

$a_k = x_i y_j - x_j y_k$; $b_k = y_i - y_j$; $c_k = x_j - x_i$;

Biarkan;

$T = N_i T_I + N_j T_j + N_k T_k$

$$\frac{\delta T}{\delta X} = \frac{\delta N_i}{\delta x} T_i + \frac{\delta N_j}{\delta x} T_j + \frac{\delta N_k}{\delta x} T_k$$

dan

$$g = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta T}{\delta x} \\ \dfrac{\delta T}{\delta y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta N_i}{\delta x} & \dfrac{\delta N_j}{\delta x} & \dfrac{\delta N_k}{\delta x} \\ \dfrac{\delta N_i}{\delta y} & \dfrac{\delta N_j}{\delta y} & \dfrac{\delta N_k}{\delta y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}$$

Dapat diperhatikan bahawa;

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_j x + c_i y)$$

Oleh itu,

$$\frac{\delta N_i}{\delta x} = \frac{b_i}{2A} \quad ; \quad \text{maka,} \qquad \frac{\delta N_i}{\delta y} = \frac{c_i}{2A}$$

Kemudian, masukkan nilai di atas kedalam matrik.

$$g = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}$$

$$= [B]\,\{T\}$$

Daripada persamaan ini, diketahui bahawa nilai bagi matrik [B] boleh ditulis sebagai;

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

Untuk analisis tegasan 2-D,

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta U}{\delta x} \\ \frac{\delta V}{\delta y} \\ \frac{\delta U}{\delta y} + \frac{\delta V}{\delta x} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_j}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_k}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_i}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_j}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_k}{\delta y} \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} & \frac{\delta N_i}{\delta x} & \frac{\delta N_j}{\delta y} & \frac{\delta N_j}{\delta x} & \frac{\delta N_k}{\delta y} & \frac{\delta N_k}{\delta x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix}$$

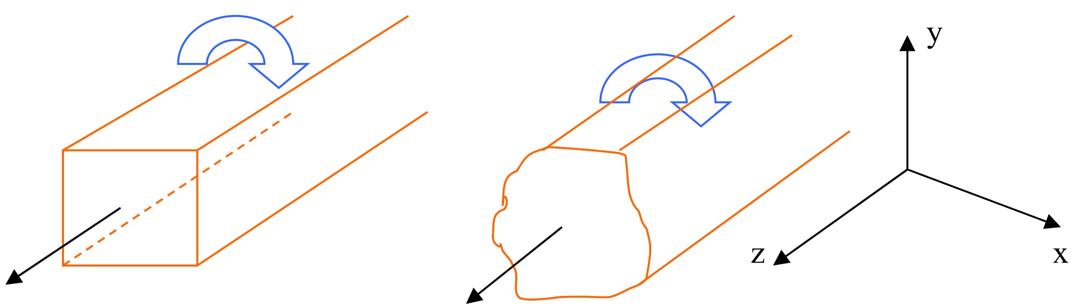
$$= \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix}$$

$$= [B]\,\{\delta\}$$

Maka, untuk kes 2-D analisis tegasan, matrik [B] boleh ditulis seperti berikut:

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}$$

3.3.7 Penggunaan: Kilasan Bentuk Tidak Bebulat



Untuk kilasan bentuk tidak bebulat, penggunaan persamaan Laplace dan persamaan Poissin adalah sangat penting.

Persamaan Laplace : $\delta^2\phi = \dfrac{\delta^2\phi}{\delta x^2} + \dfrac{\delta^2\phi}{\delta y^2}$