

Pusat Pengajian Kejuruteraan Mekanik
Universiti Sains Malaysia
Kampus Cawangan Malaysia

FINAL YEAR PROJECT

Numerical Analysis of a microchannel by using finite element method

PREPARED BY

ANVAR MYDIN S.SHAIK DAWOOD

**Thesis submitted to fulfill the requirement of graduation with honors degree in
Mechanical Engineering of University Science Malaysia (1997-2000).**

Project Supervisor

DR.GHULAM ABDUL QUADIR

PENGHARGAAN

Saya ingin mengucapkan penghargaan saya kepada penyelia projek , Dr.Ghulam Abdul Quadir membimbing saya sepanjang projek ini.Saya juga ingin mengucapkan terimakasih kepada Prof. Seetharamu membimbing saya dalam bidang electronic packaging dan analisis tegasan.

Sepanjang saya di kampus saya telah dibimbing pengetahuan oleh pensyarah-pensyarah yang terlibat dan tanpa mereka tidaklah dapat menyiapkan projek ini.

Saya juga ingin mengucapkan perasaan terimakasih saya kepada pihak kakitangan pusat pengajian mekanik kerana memebantu saya sepanjang pengajian saya di university science of Malaysia.

Akhirnya saya ingin berterimakasih kepada ibu bapa saya ,kakak saya dan rakan seperjuangan saya kerana membantu dalam pelbagai kesulitan menghabiskan projek ini.

ABSTRACT

Komponen elektronik saban hari semakin kecil dalam saiz, jadi penghasilan haba semakin meningkat dan kadar kegagalan semakin meningkat dimana satu system pembuang haba yang optimum diperlukan menggantikan pembuang haba lama seperti "Natural convection". Pembuang haba Microchannel telah digunakan untuk membuang haba dimana struktur utamanya tidak lain dari unjuran fin –fin dibuang oleh system bencalir penyejuk seperti flourinert FC77 dan dilitupi oleh sistem penebat haba .

Keefektifan Microchannel dapat dilihat dengan mengkaji penyebaran suhu sekelilingnya dengan menggunakan " Finite element method" dan disertakan program C++ untuk diaplikasikan. Program ini dapat memberi penyebaran suhu disepanjang Microchannel disaming rintangan terma keseluruhan yang wujud dalam "channel" tersebut.

Program ini juga dapat memberikan nilai-nilai seperti rintangan terma dengan mengambil kira kejatuha tekanan ,kadar aliran penyejuk dan kuasa pum yang digunakan , Laminar ,turbulent ,developed and developing flows are considered in this program.

Flux haba telah diambil samaada tersebar secar seragam ataupun secara tidak seragam. Penyebaran suhu dapat diberi oleh program ini dan pelbagai penyejuk dapat digunakan untuk mengira rintangan terma.

NOMENCLATURE

a	Setengah lebar bagi salur sesiempat.
A	Luas, m^2
b	Setengah tinggi bagi salur sesiempat, m
C_p	Spesifik haba , $J/kg \cdot K$
h	Pemalar aliran haba , $W/m \cdot K$
H	Ketinggian “channel” ,m
k	Konduktiviti terma , $W/m \cdot K$
L	Panjang keseluruhan salur ,m
m	Kadar aliran jisim, kg/s
N_1, N_2	Fungsi pembentuk bagi ‘FEM’
Q	jumlah haba yang dikenakan pada luas tertentu, W
T	Suhu, $^{\circ}C$
V	Kelajuan bendalir, m/s
x	Panjang aliran disepanjang “channel” sejuk .
y	Panjang aliran disepanjang “channel’ panas .
f	Faktor rintangan.
D	Diameter hidrolik

Re	Nombor Reynolt
α	“Aspect Ratio”
Nu	Nmbor Nusselt
ΔP	Kejatuhan tekanan, Pa.
G	Kadar aliran bendalir, m ³ /s.
POW	Kuasa pam, W.
R _{total}	Rinatngna terma keseluruhan, C°/ W / cm ² .
R _{bulk}	“Bulk temperature rise thermal resistance” ,C°/ W / cm ² .
R _{conv}	“Convective thermal resistance” ,C°/ W / cm ² .
R _{constr}	“Constriction thermal resistance”, C°/ W / cm ² .
R _{cond}	“ Conduction thermal resistance” ,C°/ W / cm ² .
η	Kecekapan fin.
X+	“hydrodynamic entrance length”, m.
Y+	“thermodynamic entrance length”, m.
CRe	Nombor Reynolt yang kritikal.
Nu _{real}	Nombor nusselt yang sebenar.
Nu ₃	Nusselt number bagi tiga dinding.
Nu ₄	Nombor Nusselt bagi empat dinding.
Pr _f	Nombor Prandtl bendalir.
Wc	Lebar” Channel”,m.
Hc	Ketinggian dinding,m
Ww	Lebar dinding ,m
μ	“fluid dynamic viscosity” ,kg/ms

ρ	Ketumpatan bendalir, kg/m ³
K_f	Konduktiviti bagi penyejuk, W/m K
K_s	Konduktiviti terma bagi pembuang haba, W/m K

<u>KANDUNGAN</u>	M/S
Penghargaan	I
Abstract	II
Nomenclature	1

Topik1: Pandangan Umum

1.1 Pengenalan	3
1.2 Penyejukan komponen elektronik	5
1.3 Pengaliran haba yang cekap dengan Microchannel.	7

Topik 2: Teori

2.1 Pengenalan	9
2.2 Bilinear Rectangular Element	9
2.3 Pendekatan Galerkin	14
2.4 Kaedah penghapusan Gauss	24

Topik3: Konduktiviti haba dan rintangan haba

3.1 Faktor rintangan	30
----------------------	----

3.2	Aliran disepanjang dinding rata	30
3.3	Rintangan terma dengan kaedah analitikal	31
3.3.1	Faktor rintangan	32
3.3.2	Pengiraan nombor nusselt	33
3.4	Pemalar	36
3.4.	Kejatuhan tekanan yang malar	36
3.4.1	Kadar aliran bendalir yang malar	37
3.4.1	kuasa pam yang malar	38

Topik4:Keseragaman haba dan ketidakseragaman haba

4.1	Flux haba yang seragam	40
4.2	Flux haba yang tidak seragam	41
4.3	Analisis	42
4.4	Kesimpulan	50

Topik 5: Pengiraan dan analisis

5.1	Pengiraan menggunakan kaedah analitikal Wan Zhimin	51
5.2	Pengiraan dibawah keadaan pemalar.	55
5.2.1	Kejatuhan tekanan yang malar	
5.2.2	Kadar aliran malar.	
5.2.3	Kuasa pam yang malar.	

Topik 6: Sifat bendalir dalam “Microchannel”

6.1	Penyejukan udara :Perolakan paksa	69
6.2	Pemilihan kipas –pemandu bendalir	70
6.3	penyejukan bendalir	71
6.4	Proses penyejukan.	72
6.4.1	Keperluan bagi penyejuk	72
6.4.2	Bendalir flourinert sebagai penyejuk terbaik .	74

Topik 7: Turbo C++	81
3.1 Carta aliran program Micro channel	82
3.2 Output program	83
3.3 Program C++	89

Topik 1: Pandangan umum

1.1 Pengenalan

Pada tahun 1986 D.B Tuckerman dan R.F. Pease dari Stamford University telah mempersembahkan bahawa litar dapat disejukkan dengan effective menggunakan satu jaluran “channel” dengan ketinggian 0.3mm dan 0.05 mm lebar disebalik substrate dan menyelaputinya dengan sekeping plate pada microchannel tersebut. Mereka berjaya membuang 790 W kuasa dihasilkan dalam 1-cm² silicon chip pada simpang suhu sekitaran dengan perbezaan suhu 71⁰C menggunakan air sebagai penyejuk mengalir pada kadar 0.01L/s melalui 100 “channel” dibawah 1 cm x1 cm chip silicon .Haba dihilangkan melalui tapak “channel” tersebut dan didapati bahawa untuk luas permukaan yang besar kesan fin adalah menjadi kurang penting. Tuckerman dan Pease menggunakan persamaan Navier Stocks dalam aliran bendalir. Tetapan yang digunakan adalah aliran laminar yang telah terbentuk, nisbah lebar channel kepada lebar fin yang tetap, “aspect ratio” yang tinggi dan kecekapan fin yang tetap.

Knigt (1991)

Beliau telah mengenalpasti julat aliran laminar dan turbulent dalam microchannel dan telah mencadangkan bahawa jumlah resistan dapat dikurangkan sehingga 35% berbanding Tuckerman and Pease.

Koh and Colony (1987)

Mereka telah menggunakan ,medium “porous” dalam micro channel dengan menggunakan pengiraan peraturan Darcy .

Tien and Kuo (1987)

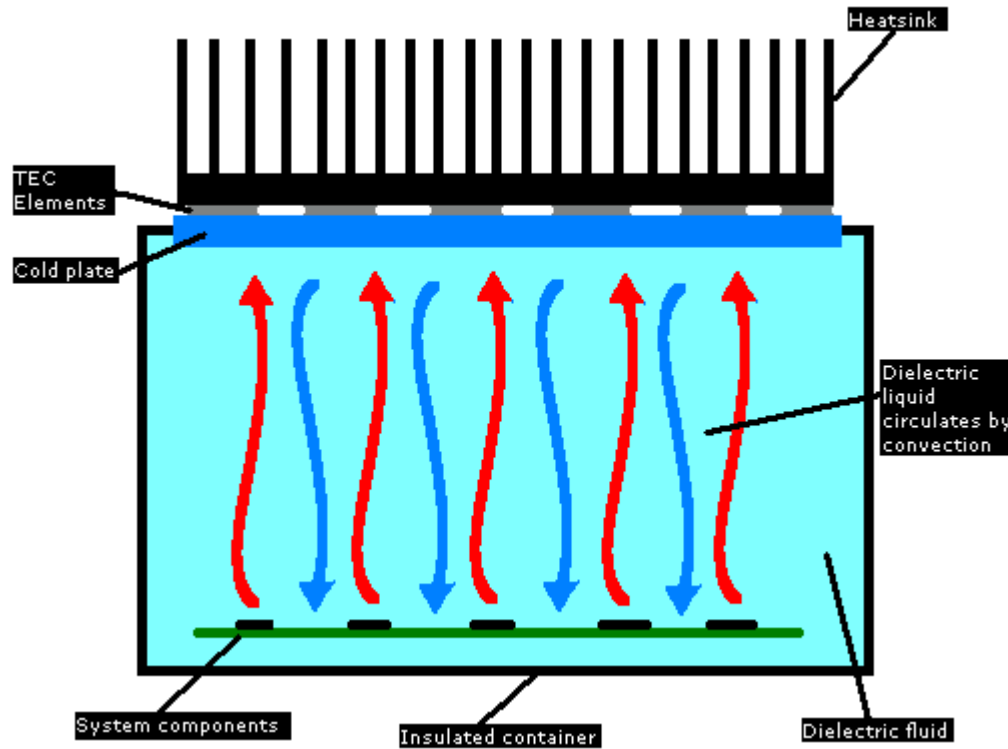
Mereka telah mengubahsuai persamaan Darcy dalam menganalisis micro channel.

Dua model persamaan telah digunakan dengan mengambil bendalir dan solid secara asing.

Penyelesaian analytical untuk halaju bendalir dan penyelesaian bernombor bagi pnyebaran suhu telah dilakukan dalam penyelidikan mereka . Flux haba adalah malar pada bahagian bawah pembuang haba dan aliran telah dikenal pasti sebagai aliran laminar yang terbentuk penuh. Didapati bahawa rintangan microchannel adalah berkurang dengan pertambahan kecekapan finnya.

S.J.Kim and D.Kim(1999)

Penyelesaian analitikal untuk halaju dan suhu sepanjang microchannel sebagai pembuang haba dalam medium “porous” telah digunakan. Penyelesaian analytical adalah merujuk kepada model Darcy untuk aliran bendalir ,dua eprsamaan asing telah diambilkira untuk penyebaran haba solid dan cecair. Mereka telah menunjukkan bahawa porous medium boleh digunakan untuk mengoptimamkan pengaliran haba dan rintangan keseluruhan lebih baik tepat dikira.



1.2 Penyejukan komponen elektronik

Sistem elektronik dan komponen elektronik seperti semikonduktor ,device micro gelombang, printed circuit board(PCB)telah kecil dari saiznya. Pada masa yang sama kuasa mereka telah meningkat . Suhu di man adevice ini bekerja perlu dikawal ,sebaliknya kegagalan komponen akan berlaku.Haba terbentuk dalam komponen elektronik dari aliran arus .Ia mesti dibuang ke sekeliling dengan mengadakan aliran haba yang terbaik.Unutk device yang kecil,udara boleh digunakan sebagai penyajuk manakala bagi penyajukan yang melampau bendalir penyejuk boleh digunakan .

Untuk kaedah ini, suhu komponen elektronik adalah lebih tinggi daripada suhu luaran. Jadi apabila suhu luaran telah terlalu tinggi untuk operasi selamat maka sistem refrigeration perlu digunakan.

Perolakan semulajadi tidak memerlukan peralatan tambahan dan kurang menggunakan kaedah complex untuk menyejukkan komponen elektrik. Fin digunakan untuk menghilangkan haba. Kaedah perolakan paksa memerlukan kipas untuk memandu bendalir pada kelajuan tertentu. Untuk penggunaan bendalir penyejuk pula kita memerlukan pam untuk menghantar bendalir pada kelajuan tertentu dan sistem kawalan diperlukan.

Komponen semikonduktor yang menghasilkan haba dapat dibuangkan melalui aliran haba secara konduksi melalui unjuran fin yang mana digunakan untuk meningkatkan kawasan pengaliran haba melalui perolakan.

1.4 Pengaliran haba yang cekap dengan pembuang haba microchannel

Pembuang haba Microchannel merupakan salah satu cara membuang haba yang efficient dan merupakan yang paling compact untuk menghilangkan tenaga haba dari sumber haba ke bendalir penyejuk. Dalam kebanyakan sistem penyejukan cecair, rintangan adalah terdapat pada bendalir itu sendiri. Ini adalah disebabkan konduktiviti haba bendalir cecair yang rendah berbanding konduktiviti pepejal pada pembuang haba. Dengan mengurangkan saiz lapisan sempadan pada aliran bendalir tersebut dalam microchannel dan meningkatkan luas sentuhan diantara permukaan fin dan bendalir, dapat membuang haba sebanyak 50 kali berbanding kaedah pembuang haba lama seperti kaedah penggunaan perolakan semulajadi atau penggunaan cecair untuk menyejukkan plate panas. Microchannel ini dapat digunakan untuk membuang haba pada sistem radar, rangkaian utama komputer dan supercomputer. Untuk aplikasi ini jumlah haba yang banyak dibuangkan dengan peningkatan suhu bendalir penyejuk yang kurang daripada $(1/50)$ suhu permukaan fin microchannel.

Bahan dan penyejuk

Silicon telah digunakan sebagai bahan pembuang haba kerana ia adalah sesuai dengan penggunaan litar-litar silicon, konduktivitinya adalah tinggi dan mudah dari segi fabrikasi channel.

Kecekapan pembuang haba

Dalam ujian tertentu , penyejuk air , silicon microchannel heatsinks telah bekerja lebih dari 3000 jam dan 25 million thermal cycles (per heatsink) tanpa kegagalan. Pembuang haba yang berasaskan penjukan iar mempunyai rintangan terma yang kurang daripada $0.1 \text{ cm}^2 \text{ }^\circ\text{C}/\text{W}$. Ini bermakna chip litar dengan $1 \times 1\text{-cm}$ yang menghasilkan $150 \text{ W}/\text{cm}^2$ boleh beroperasi 15°C lebih tinggi daripada suhu bendalir . Pembuang haba jenis silicon yang tersejuk dengan cecair nitrogen mempunyai rintangan terma kurang daripada $0.05 \text{ }^\circ\text{C}/\text{W}$. Walaupun susah difabrikasi pada kuantiti yang banyak namun ia menunjukkan tahap penggunaan yang tinggi .

Penyejukan udara sangat diminati bagi sesetengah aplikasi ,walupun sifatnya sebagai penyejuk adalah tidak tertanding dengan penyejuk yang lain seperti flourinert. Namun Ia menunjukkan rintangna terma kurang daripada $1 \text{ cm}^2 \text{ }^\circ\text{C}/\text{W}$ tanpa penggunaan tenaga yang banyak untuk menjalankan propelar yang memandu udara sepanjang microchannel .

Topik 2: Kaedah elemen terhingga.

2.1)Pengenalan

Analisis Micro channel dilakukan dengan membahagikan microchannel kepada 12 elemen dan dengan mengamibil elemen bliliniar berat bagi setiap not dapat dikira dengan menggunakan kaedah matriks.

2.2 Bilinear Rectangular Element

for the figure above the equation can be written :

$$\phi = C_1 + C_2s + C_3t + C_4st$$

C_1, C_2, C_3, C_4 are coefficient obtained by using nodal values of ϕ and the the nodal coordinates will generate 4 equations as below:

$$\phi = C_1$$

$$\phi = C_1 + (2b)C_2$$

$$\phi = C_1 + (2b)C_2 + (2a)C_3 + (4ab)C_4$$

$$\phi = C_1 + (2b)C_3$$

By solving the above equation,gives:

$$C_1 = \phi_1$$

$$C_2 = 1/2b (\phi_1 - \phi_j)$$

$$C_3 = 1/2a (\phi_m - \phi_i)$$

$$C_4 = 1/4ab (\phi_i - \phi_j + \phi_k - \phi_m) \text{ ----- equation 2}$$

$$\phi = N_i\phi_i + N_j\phi_j + N_k\phi_k - N_m\phi_m$$

where

$$N_i = (1-s/2b)(1-t/2b)$$

The shape functions for the bilinear rectangular element have properties similar to those possessed by the triangular element. Each shape function varies linearly along the edges between its node and the two adjacent nodes. For example, N_i varies linearly along sides ij and im . Each shape function is also zero along the sides its node does not touch, that is, N_i is zero along sides jk and km . The linear variation of ϕ along an edge of the rectangular element and an edge of the triangular element means that these two elements are compatible and can be used adjacent to one another.

The transformation equations between the qr and st coordinate systems are

$$s = b + q \quad \text{and} \quad t = a + r \tag{5}$$

Substitution of (5) into (4) gives the shape functions in term of q and r

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{b} \right) \left(1 - \frac{r}{a} \right) \\ N_j &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q}{b} \right) \left(1 - \frac{r}{a} \right) \\ N_k &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q}{b} \right) \left(1 + \frac{r}{a} \right) \\ N_m &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{b} \right) \left(1 + \frac{r}{a} \right) \end{aligned} \tag{6}$$

Since the st coordinate system is parallel to the xy -coordinate system and a unit length in either s or t is the same as a unit length of x or y ,

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_A f(s, t) ds dt$$

Equally important is the relationship between the derivations. The chain rule gives

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = \frac{\partial N_\beta}{\partial s} \quad \text{and} \quad \frac{\partial N_\beta}{\partial y} = \frac{\partial N_\beta}{\partial t}$$

The shape functions (4) are

$$N_i = 1 - \frac{s}{2b} - \frac{t}{2a} + \frac{st}{4ab},$$

$$N_j = \frac{s}{2b} - \frac{st}{4ab}$$

$$N_k = \frac{st}{4ab}$$

$$N_m = \frac{t}{2a} + \frac{st}{4ab}$$

The evaluation of $[k^{(e)}]$ and $\{f^{(e)}\}$ is illustrated by considering a specific integral in each case. The easiest integrations are associated with $\{f^{(e)}\}$, which is

$$\{f^{(e)}\} = \int_A Q[N]^T dA = \int_0^{2b} \int_0^{2a} Q \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_m \end{Bmatrix} dt ds$$

Considering the third coefficient gives

$$\begin{aligned} \int_0^{2b} \int_0^{2a} N_k dt ds &= \int_0^{2b} \int_0^{2a} \frac{st}{4ab} dt ds = \int_0^{2b} \left. \int_0^{2a} \frac{st^2}{8ab} \right|_0^{2a} ds \\ &= \int_0^{2b} \frac{as}{2b} ds = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

The other three integrals yield the same result and

$$\{f^{(e)}\} = \frac{QA}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

The integral associated with $[k^{(e)}]_G$ is

$$[k_G^{(e)}] = \int_A G[N]^T [N] dA$$

$$\int_A G \begin{bmatrix} N_i^2 & \dots & N_i N_j & \dots & N_i N_k & \dots & N_i N_m \\ N_i N_j & \dots & N_j^2 & \dots & N_j N_k & \dots & N_j N_m \\ N_i N_k & \dots & N_j N_k & \dots & N_k^2 & \dots & N_k N_m \\ N_i N_m & \dots & N_j N_m & \dots & N_k N_m & \dots & N_m^2 \end{bmatrix} dA$$

Selecting the N_k^2 term, we have

$$\int_0^{2b} \int_0^{2a} \left(\frac{(st)^2}{4ab} \right)^2 dt ds = \int_0^{2a} \int_0^{2b} \frac{s^2 t^2}{16a^2 b^2} dt ds = \frac{4ab}{9} = \frac{A}{9}$$

The complete set of coefficients is

$$[k_G^{(e)}] = \frac{GA}{36} \begin{bmatrix} 4..2..1..2 \\ 2..4..2..1 \\ 1..2..4..2 \\ 2..1..2..4 \end{bmatrix}$$

The evaluation of $[k_D^{(e)}]$ involves the derivatives of the shape functions. The gradient matrix [B] is

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(2a-t) & \dots & (2a-t) & \dots & t & \dots & -t \\ -(2b-s) & \dots & -s & \dots & s & \dots & (2b-s) \end{bmatrix}$$

The coefficient in the first row and first column of $[k_D^{(e)}]$ is available after the multiplication $[B]^T [D] [B]$ have been performed. The coefficient is

$$\frac{D_x}{16a^2 b^2} (2a-t)^2 dt ds + \frac{D_y}{16a^2 b^2} (2b-s)^2$$

and the associated integral is

$$\int_0^{2b} \int_0^{2a} \frac{D_x}{16a^2b^2} (2a-t)^2 dt ds + \int_0^{2b} \int_0^{2a} \frac{D_y}{16a^2b^2} (2b-s)^2 dt ds$$

Which integrate to

$$\frac{D_x a}{3b} + \frac{D_y b}{3a}$$

The complete result for $[k_D^{(e)}]$ is given by

$$[k_D^{(e)}] = \frac{D_x a}{6b} \begin{bmatrix} \dots 2 \dots - 2 \dots - 1 \dots 1 \\ - 2 \dots 2 \dots 1 \dots - 1 \\ - 1 \dots 1 \dots 2 \dots - 2 \\ \dots 1 \dots - 1 \dots - 2 \dots 2 \end{bmatrix} + \frac{D_y b}{6a} \begin{bmatrix} \dots 2 \dots 1 \dots - 1 \dots - 2 \\ \dots 1 \dots 2 \dots - 2 \dots - 1 \\ - 1 \dots - 2 \dots 2 \dots 1 \\ - 2 \dots - 1 \dots 1 \dots 2 \end{bmatrix}$$

2.3 Galerkin Approach.

Applying the equation above, now we can obtain equations for the element below.

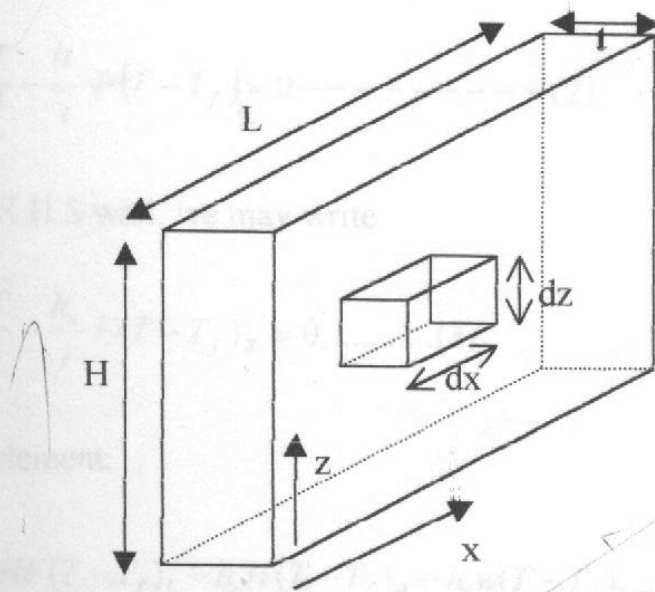


Fig 6 : Two-dimensional model for heat conduction

$$Q_{cond} = -ktdz \frac{\partial T}{\partial x} - \left\{ -ktdz \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-ktdz \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right\} - ktdx - \left\{ -ktdx \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(-ktdx \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \right\}$$

$$Q_{cond} = ktdxdz \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + ktdxdz \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \dots \dots \dots (1)$$

The heat lost to the coolant is given by

$$Q_{conv}^{out} = -h_c F dx dz (T - T_f)_L$$

Energy balance :

$$Q_{conv} + Q_{conv}^{out} = 0$$

or,

$$k(tdxdz) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k(tdxdz) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - h_c F(dx dz) (T - T_f)_L = 0$$

dividing by tdzdx, we get,

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{h_c}{t} F (T - T_f)_L = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Similarly for R.H.S wall, we may write

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{h_c}{t} F (T - T_f)_R = 0 \dots \dots \dots (3)$$

For the fluid element:

$$m c_p \frac{dT_f}{dx} - h_c H F (T - T_f)_L - h_c H (T - T_f)_R - h_c W (T - T_f)_{bottom} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

$$(T - T_f)_L = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4} - \frac{T_5 + T_6}{2}$$

$$(T - T_f)_R = \frac{T_7 + T_8 + T_9 + T_{10}}{4} - \frac{T_5 + T_6}{2}$$

$$(T - T_f)_{bottom} = \frac{T_1 + T_2 + T_7 + T_8}{4} - \frac{T_5 + T_6}{2}$$

The wall temperature T is assumed to vary as

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 + N_4 T_4$$

Where the shape functions N_i for the rectangular element are given by the expression in

$$N_i = (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$$

Where ξ, η are the natural coordination of the rectangular element.

T_f is assumed to vary

$$T_f = N_{1f}T_5 + N_{2f}T_6$$

Where $N_{1f} = 1 - x/l$

$$N_{2f} = x/l$$

The Galerkin weighted residual integral for equation(2) is written as follow ;

$$\iint [N]^T \left(\left(k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{t} h_c F \left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 T_i - \frac{1}{2} \sum_{j=5}^6 T_j \right) \right) dx dz = 0$$

$$\int k[N]^T \frac{\partial T}{\partial x} dx + \int k[N]^T \frac{\partial T}{\partial z} dz - \frac{tkH}{6L} \begin{bmatrix} \dots 2 \dots - 2 \dots - 1 \dots 1 \\ - 2 \dots 2 \dots 1 \dots - 1 \\ - 1 \dots 1 \dots 2 \dots - 2 \\ \dots 1 \dots - 1 \dots - 2 \dots 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix}$$

$$- \frac{tkL}{6H} \begin{bmatrix} \dots 2 \dots 1 \dots - 1 \dots - 2 \\ \dots 1 \dots 2 \dots - 2 \dots - 1 \\ - 1 \dots - 2 \dots 2 \dots 1 \\ - 2 \dots - 1 \dots 1 \dots 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} - \frac{h_c FLH}{16} \begin{bmatrix} 1111 - 2 - 2 \\ 1111 - 2 - 2 \\ 1111 - 2 - 2 \\ 1111 - 2 - 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = 0$$

The line integrals do not contribute anything to the stiffness matrix , so

$$\begin{pmatrix} 2e_x + 2e_z + c & -2e_x + e_z + c & -e_x - e_z + c & e_x - 2e_z + c & -2c & -2c \\ -2e_x + e_z + c & 2e_x + 2e_z + c & e_x - 2e_z + c & -e_x - e_z + c & -2c & -2c \\ -e_x - e_z + c & e_x - 2e_z + c & 2e_x + 2e_z + c & -2e_x + e_z + c & -2c & -2c \\ e_x - 2e_z + c & -e_x - e_z + c & -2e_x + e_z + c & 2e_x + 2e_z + c & -2c & -2c \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

T_6 0

Galerkin formulation of equation (3) in a similar manner will give the following matrix equation.

$$\begin{pmatrix} 2e_x+2e_z+c & -2e_x+e_z+c & -e_x-e_z+c & e_x-2e_z+c & -2c & -2c \\ -2e_x+e_z+c & 2e_x+2e_z+c & e_x-2e_z+c & -e_x-e_z+c & -2c & -2c \\ -e_x-e_z+c & e_x-2e_z+c & 2e_x+2e_z+c & -2e_x+e_z+c & -2c & -2c \\ e_x-2e_z+c & -e_x-e_z+c & -2e_x+e_z+c & 2e_x+2e_z+c & -2c & -2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Galerkin formulation of equation (4) will give the following equation .

$$U = \frac{-h_c L F H}{8} = -h_c F \frac{LH}{8}$$

$$\int_0^L \begin{bmatrix} N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} mc_p \frac{\partial T_f}{\partial x} dx - \int_0^L \begin{bmatrix} N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} h_c HF \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=4} T_i - \frac{1}{2} \sum_{j=5}^{j=6} T_j \right\} dx - \int_0^L \begin{bmatrix} N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} h_c H \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=7}^{i=10} T_i - \frac{1}{2} \sum_{j=5}^{j=6} T_j \right\}$$

$$- \int \begin{bmatrix} N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} h_c w \left\{ \frac{1}{4} (T_1 + T_4 + T_7 + T_{10}) - \frac{1}{2} \sum_{k=5}^{k=6} T_k \right\} dx = 0$$

Now, for the first term;

$$\int_0^L \begin{bmatrix} N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} mc_p \frac{\partial T_f}{\partial x} dx = mc_p \int_0^L \begin{bmatrix} N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} \left[\frac{\partial N_5}{\partial x} - \frac{\partial N_6}{\partial x} \right] \begin{Bmatrix} T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} dx$$

$$= mc_p \int_0^L \begin{bmatrix} -N_{5/1} N_{5/1} \\ -N_{6/1} N_{6/1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} dx = \frac{mc_p}{2} \begin{bmatrix} -1 \dots 1 \\ -1 \dots 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (a)$$

The second term :

$$\int_0^L \begin{bmatrix} N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} - h_c H F \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 T_i - \frac{1}{2} \sum_{j=5}^6 T_j \right\} dx = \frac{-h_c H F L}{8} [T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 2T_5 - 2T_6] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U & U & U & U & -2U & -2U \\ U & U & U & U & -2U & -2U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (b)$$

where $U = -h_c H F L / 8$ for fluid's nodes

For third term:

$$\int_0^L \begin{bmatrix} N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} - h_c H \left\{ \frac{1}{4} (T_7 + T_8 + T_9 + T_{10}) - \frac{1}{2} (T_5 + T_6) \right\} dx$$

$$= \begin{pmatrix} -2V & -2V & V & V & V & V \\ -2V & -2V & V & V & V & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (c)$$

where $V = -h_c H L / 8$

For the fourth term

$$\int_0^L \begin{bmatrix} N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} - h_c W \left\{ \frac{1}{4} (T_1 + T_2 + T_7 + T_8) - \frac{T_5 + T_6}{2} \right\} dx$$

$$= \frac{-h_c wL}{8} [T_1 + T_2 + T_7 + T_8 - 2T_5 + 2T_6]$$

Let $W = -h_c wL/8$

$$= \begin{pmatrix} W & W & -2W & -2W & W & W \\ W & W & -2W & -2W & W & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(d)$$

Galerkin formulation for equation (4)

Adding (a) + (b) + (c) +(d) for fluids nodes;

$$(U+V)T_1 + (U+V)T_2 + UT_3 + UT_4 + (-fm-2U-2V-2W)T_5 + (fm-2U-2V-2W)T_6 + (V+W)T_7 + (V+W)T_8 + VT_9 + VT_{10} = 0$$

$$(U+V)T_1 + (U+V)T_2 + UT_3 + UT_4 + (-fm-2U-2V-2W)T_5 + (fm-2U-2V-2W)T_6 + (V+W)T_7 + (V+W)T_8 + VT_9 + VT_{10} = 0$$

$$-2cT_5 + -2T_6 + (-2e_x+2e_z+c)T_7+(2e_x+e_z+c)T_8 + (-e_x-e_z+c)T_9 + (e_x-2e_z+c)T_{10} = 0$$

$$-2cT_5 + -2cT_6 + (-2e_x-e_z+c)T_7 + (2e_x+2e_z+c)T_8 + (e_x-2e_z+c)T_9 + (-e_x-e_z+c)T_{10} = 0$$

$$-2cT_5 + -2cT_6 + (-e_x-e_z+c)T_7 + (e_x-2e_z+c)T_8 + (2e_x+2e_z+c)T_9 + (-2e_x+e_z+c)T_{10} = 0$$

$$-2cT_5 + -2cT_7 + (e_x-2e_z+c)T_7+ (-e_x-e_z+c)T_8 + (-2e_x+e_z+c)T_9 + (2e_x+2e_z+c)T_{10} = 0$$

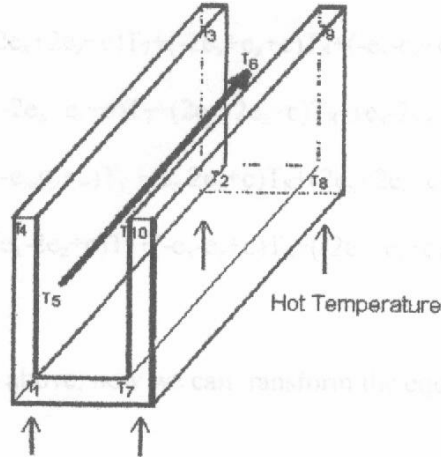


Figure 7. Temperature nodes in first element

$$e_x = tkL/6H \quad \checkmark$$

$$e_z = tkH/6L$$

$$c = h_c FLH/16$$

$$U = -h_c FLH/8$$

$$V = -h_c HL/8$$

$$W = -h_c wH/8$$

$$f_m = mc_p/2$$

$$(2e_x + 2e_z + c)T_1 + (-2e_x + e_z + c)T_2 + (-e_x - e_z + c)T_3 + (e_x - 2e_z + c)T_4 + (-2c)T_5 + (-2c)T_6 = 0 \quad \text{-----(1)}$$

$$(-2e_x + e_z + c)T_1 + (2e_x + 2e_z + c)T_2 + (e_x - 2e_z + c)T_3 + (-e_x - e_z + c)T_4 + (-2c)T_5 + (-2c)T_6 = 0 \quad \text{-----(2)}$$

$$(-e_x - e_z + c)T_1 + (e_x - 2e_z + c)T_2 + (2e_x + 2e_z + c)T_3 + (-2e_x + e_z + c)T_4 + (-2c)T_5 + (-2c)T_6 = 0 \quad \text{-----(3)}$$

$$(e_x - 2e_z + c)T_1 + (-e_x - e_z + c)T_2 + (-2e_x + e_z + c)T_3 + (2e_x + 2e_z + c)T_4 + (-2c)T_5 + (-2c)T_6 = 0 \quad \text{-----(4)}$$

$$(U+V)T_1 + (U+V)T_2 + UT_3 + UT_4 + (-fm - 2U - 2V - 2W)T_5 + (fm - 2U - 2V - 2W)T_6 + (V+W)T_7 + (V+W)T_8 + VT_9 + VT_{10} = 0 \quad \text{-----(5)}$$

$$(U+V)T_1 + (U+V)T_2 + UT_3 + UT_4 + (-fm - 2U - 2V - 2W)T_5 + (fm - 2U - 2V - 2W)T_6 + (V+W)T_7 + (V+W)T_8 + VT_9 + VT_{10} = 0 \quad \text{-----(6)}$$

Step 2 : Replace the original fifth column and row with zero except node(5,5) with 1.

$$\begin{pmatrix}
 A & B & C & D & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 B & A & D & C & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 C & D & A & B & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 D & C & B & A & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 F & F & U & U & 0 & J & H & H & V & V \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & A & B & C & D \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & B & A & D & C \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & C & D & A & B \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & D & C & B & A
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 T1 \\
 T2 \\
 T3 \\
 T4 \\
 T5 \\
 T6 \\
 T7 \\
 T8 \\
 T9 \\
 T10
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 -T_3 * I \\
 -T_3 * I \\
 -T_3 * I \\
 -T_3 * I \\
 T_5 \\
 -T_3 * G \\
 -T_3 * I \\
 -T_3 * I \\
 -T_3 * I \\
 -T_3 * I
 \end{pmatrix}$$

Step 3 : Heat flows from the bottom of the channel. The nodes involved are 1, 2, 7 and 8.

Add BC_i to row 1, 2, 7 and 8.

Where BC_i = flux density

$$= \text{Heat Flux} / n$$

n = number of nodes at the bottom of the channel.

$$\begin{pmatrix}
 A & B & C & D & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 B & A & D & C & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 C & D & A & B & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 D & C & B & A & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 F & F & U & U & 0 & J & H & H & V & V \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & A & B & C & D \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & B & A & D & C \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & C & D & A & B \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & D & C & B & A
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 T1 \\
 T2 \\
 T3 \\
 T4 \\
 T5 \\
 T6 \\
 T7 \\
 T8 \\
 T9 \\
 T10
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 -T_3 * I + BC \\
 -T_3 * I + BC \\
 -T_3 * I \\
 -T_3 * I \\
 T_5 \\
 -T_3 * G \\
 -T_3 * I + BC \\
 -T_3 * I + BC \\
 -T_3 * I \\
 -T_3 * I
 \end{pmatrix}$$