

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1990/91

Mac/April 1991

JAM 353 Analisis Kompleks

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab SEMUA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira elektronik TIDAK boleh digunakan.

1. (a) (i) Buktikan bahawa

$$\sqrt{2} |z| \geq |N_y(z)| + |K_h(z)|$$

(ii) Nyatakan punca-punca bagi persamaan

$$z^4 + 2z^2 + 2 = 0 \text{ di dalam bentuk } a + ib.$$

(40 markah)

(b) Tunjukkan bahawa di bawah pemetaan $w = \frac{1}{z}$, suatu bulatan yang melalui asalan di dalam satah z akan menjadi suatu garis lurus yang tidak melalui asalan di dalam satah w .

(30 markah)

(c) Nilaikan

(i) $(4\sqrt{3} - 4i)^{\frac{3}{2}}$

(ii) $\log(1 + \sqrt{3}i)$

(iii) $\text{Log}(1 + \sqrt{3}i)$

(30 markah)

2. (a) Tunjukkan bahawa jika $w = f(z) = u + iv$ analisis di dalam rantau D , maka $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = -i \frac{\partial w}{\partial y}$

(30 markah)

- (b) Katakan suatu fungsi f analisis di dalam domain D . Tunjukkan bahawa f ialah suatu fungsi malar jika

(i) f bernilai nyata $\forall z \in D$.

(ii) fungsi $\overline{f(z)}$ juga analisis di dalam D .

(iii) $|f(z)|$ malar $\forall z \in D$.

(30 markah)

- (c) Katakan $z = x + iy$ dan $f(z) = (xy - 4xy^2) + \left(4x^2y + y - \frac{x^2}{2} - \frac{4y^3}{3}\right)i$,

(i) cari semua titik di mana f terbezakan.

(ii) cari semua titik di mana f analisis.

(40 markah)

3. (a) Nilaiikan $\int_c (z\bar{z} + 1) dz$ di mana c ialah tembereng garis dari $z_1 = -i$ kepada $z_2 = 0$.

(30 markah)

- (b) Katakan C sebagai kontur $C : z(t) = t + (2t)i, 1 \leq t \leq 3$, dan katakan f sebagai suatu fungsi selanjar demikian sehingga $|f(z)| \leq 5$ untuk semua z di atas C . Cari pemalar terkecil K demikian sehingga

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq K.$$

(30 markah)

- (c) Katakan f analisis di mana-mana kecuali pada $z = \pm i$. Katakan c_1 sebagai suatu kontur tertutup ringkas yang mengandungi sebuah segiempat tepat yang bersisi di sepanjang garis $x = \pm 4$ dan $y = \pm 3$ dan katakan c_2 sebagai suatu bulatan $|z| = 2$. Jika kedua-dua c_1 dan c_2 berorientasi positif, adakah

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_{c_2} f(z) dz ?$$

Terangkan.

(40 markah)

4. (a) Nilaikan

(i)
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} dx$$

(ii)
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} + 3e^{i\theta} \right) d\theta$$

(35 markah)

(b) Katakan z_0 sebagai suatu titik singular terpencil bagi f dan katakan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$
 sebagai siri Laurent bagi f untuk

$0 < |z - z_0| < r$. Maka daripada takrif:

(i) z_0 ialah suatu kutub bagi f

jika _____.

(ii) z_0 ialah suatu titik singular penting bagi f

jika _____.

(20 markah)

(c) Katakan $C : |z| = 3$ berorientasi positif. Nilaikan kamiran berikut

(i)
$$\int_C \frac{2}{(z^2 + 4)(z - 2i)^2} dz$$

(ii)
$$\int_C \frac{e^z}{\sin z} dz$$

(iii)
$$\int_C z^3 e^{-\frac{1}{z^2}} dz$$

(45 markah)

5. (a) Nyatakan serta buktikan Rumus Kamiran Cauchy.

(40 markah)

(b) Cari perwakilan siri Taylor bagi $f(z) = \frac{1}{1 - z}$ di dalam kuasa $(z - i)$ yang sah untuk $|z - i| < \sqrt{2}$.

(30 markah)

(c) Lakarkan imej di dalam satah-w bagi rantau $4 > x > \frac{7}{2}, y > 0$ di dalam satah-z di bawah transformasi $w = \frac{1}{z - 3}$

(30 markah)

ooooo0ooooo