UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1990/91

Mac/April 1991

JAM 352 Aljabar Moden I

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira eletronik boleh digunakan.

---

1. (a) Hubungan W ditakrifkan atas set semua nombor $\mathbb{R}$ dengan $x \, W \, y \Leftrightarrow x - y$ adalah suatu integer ganjil. Tentukan sama ada W

(i) refleksif
(ii) simetri
(iii) transitif

Cari [3] W

(20 markah)

(b) Hubungan M atas set $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ diberi seperti berikut:

$$M = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (3, 5), (4, 1), (4, 4), (5, 3), (5, 5)\}$$

Cari set hasil bahagi untuk M.

(10 markah)

(c) Katakan $\mathbb{Z}$ ialah set semua integer dan f, g ialah fungsi dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$ yang ditakrifkan seperti berikut:

$$(x)f = x^2 - 3, \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$(x)g = \begin{cases} x - 2 , & x < 1 \\ x + 2 , & x \geq 1 \end{cases}$$

(i) Tentukan sama ada f satu-ke-satu atau keseluruh

(ii) Cari $(x)(fog)$ dan $(x)(gof)$.

(30 markah)

...3/-

(d) Katakan

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \text{ dan } a \neq 0 \right\}$$

dan X ialah pendaraban matriks. Tentukan sama ada operasi X

(i) suatu operasi dedua atas G
(ii) kalis sekutuan
(iii) kalis tukartertib

Cari

(iv) identiti bagi X

(v) Songsangan bagi $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \in G$.

(40 markah)

2. (a) Cari sifir Cayley bagi

(i) Suatu kumpulan G = {e, a, b} yang mengandungi tiga unsur.

(ii) Suatu kumpulan G = {e, a, b, c} yang bukan kumpulan kitaran dan yang mengandungi empat unsur.

(20 markah)

(b) Katakan Q ialah set semua nombor nisbah dan

$$H = \left\{ \frac{5m}{7^n} \;\middle|\; m, n \text{ ialah integer dan } n > 0 \right\}$$

Tentukan sama ada H suatu subkumpulan bagi <Q, +>

(20 markah)

(c) Katakan <G, *> ialah suatu kumpulan dan $a \in G$. Buktikan

$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ bagi semua integer positif n.

(20 markah)

(d) Katakan $\mathbb{R}$ ialah set semua nombor nyata dan
$G = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \neq 0\}$ dan * ditakrifkan atas G dengan
$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$

(i) Tunjukkan <G, *> adalah suatu kumpulan.

(ii) Tentukan sama ada

$H = \{(1, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$

merupakan suatu subkumpulan normal bagi G.

(40 markah)

...5/-

3. (a) Katakan dua pilihatur diberi seperti berikut:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Cari

(i) $\alpha\beta$
(ii) peringkat bagi α
(iii) peringkat bagi $\beta^{-1}\alpha^2\beta$
(iv) peringkat bagi α^{23}
(v) $\alpha^{99}\beta^{99}$

Tentukan sama ada α genap atau ganjil.

(30 markah)

(b) Katakan S_3 ialah kumpulan simetri darjah 3 dan A_3 ialah kumpulan selang-seli darjah 3. Tunjukkan A_3 adalah suatu subkumpulan normal bagi S_3 dan cari S_3/A_3.

(30 markah)

(c) Jika $H = \{e, (23)\}$, senaraikan semua koset kanan bagi H di dalam S_3.

(10 markah)

(d) Katakan H ialah suatu subkumpulan normal bagi S_3. Jika $(1\ \ 2) \in H$ buktikan $H = S_3$.

(30 markah)

...6/-

4. (a) Katakan (G, *) ialah suatu kumpulan terhingga dan H ialah suatu subkumpulan bagi G. Buktikan

(i) $|H| = |Ha|$ bagi sebarang $a \in G$.

(ii) $\frac{|G|}{|H|}$ = suatu integer positif.

(40 markah)

(b) Katakan <G, *> ialah suatu kumpulan terhingga dan $a \in G$. Jika e = unsur identiti dan $|G| = n$, buktikan $a^n = e$.

(30 markah)

(c) Katakan H dan K dua subkumpulan normal bagi suatu kumpulan <G, *> dan e = unsur identiti. Jika $H \cap K = \{ e \}$ buktikan $x * y = y * x$ bagi $x \in H$ dan $y \in K$.

(30 markah)

5. (a) Katakan $\mathbb{Z}$ ialah set semua integer, dan f, g dan h ialah fungsi dari $<\mathbb{Z}, +>$ ke $<\mathbb{Z}, +>$ yang ditakrifkan seperti berikut:

$(x)f = 2x + 1$
$(x)g = (-1)^x$
$(x)h = 3x$

Tentukan sama ada f, g atau h hommorfisma.

(30 markah)

...7/-

(b) Buktikan S_3 tidak isomorfisma dengan suatu kumpulan kitaran yang mempunyai 6 unsur.

(30 markah)

(c) Katakan kumpulan $<H_1, 0>$ isomorfisma dengan kumpulan $<H_2, *>$ Tunjukkan

(i) Jika H_1 abelan maka H_2 juga abelan

(ii) Jika H_1 suatu kumpulan kitaran
maka H_2 juga suatu kumpulan kitaran.

(40 markah)

6. (a) Katakan $<G, *>$ ialah suatu kumpulan dan H, K dua subkumpulan bagi G. Buktikan

(i) $H \cap K$

(ii) $g^{-1} Hg \quad , \; g \in G$

adalah subkumpulan bagi G.

Dengan memberi contoh, tunjukkan bahawa, pada amnya, HK dan $H \cup K$ bukan subkumpulan bagi G.

(40 markah)

(b) Takrifkan
(i) domain integer
(ii) medan.

(10 markah)

...8/-

(c) Katakan $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

dan +, x ialah, masing-masing penambahan dan pendaraban matriks.

(i) Tunjukkan <M, +, x> adalah suatu gelanggang.

(ii) Tentukan sama ada gelanggang ini suatu domain integer.

(50 markah)

oooooOooooo