UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1990/91

Mac/April 1991

JAM 243 Kaedah Matematik

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

---

1. (a) Jika $\phi = x^2y^2z^2$ dan $\underset{\sim}{F} = x^2y\underset{\sim}{i} + xz^3\underset{\sim}{j} - y^2z^2\underset{\sim}{k}$

cari

(i) $\nabla^2\phi$,

(ii) $\nabla^2\underset{\sim}{F}$,

(iii) $\nabla \wedge (\nabla \wedge \underset{\sim}{F})$.

(30 markah)

(b) Cari fluks medan vektor $\underset{\sim}{F} = z\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$ yang melalui permukaan

$x = \sin u \text{ kos } v,\ y = \sin u \sin v,\ z = \text{kos}^2 u$ jika diberi $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$,

$0 \leq v < 2\pi$.

(30 markah)

(c) Nyatakan teorem Stoke. Tentusahkan teorem Stoke untuk medan vektor $\underset{\sim}{F} = (x+y)\underset{\sim}{i} - 2x^2\underset{\sim}{j} + xy\underset{\sim}{k}$ bagi permukaan separuh atas sfera

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(40 markah)

2. (a) Fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mempunyai kala 2ℓ dan Siri Fourier

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \text{ kos } \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Tuliskan ungkapan untuk a_n dan b_n.

(20 markah)

(b) Fungsi-fungsi f, g : [- π, π] $\to \mathbb{R}$ mempunyai Siri Fourier yang masing-masing diberi oleh

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{ kos } nx + b_n \sin nx),$$

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \text{ kos } nx + B_n \sin nx).$$

Tunjukkan bahawa

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\ dx = \frac{1}{2}\, a_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n)\, .$$

(40 markah)

(c) Cari Siri Fourier untuk sin $\frac{x}{2}$ dan kos $\frac{x}{2}$ di dalam selang [- π, π]. Dengan menggunakan keputusan di dalam (b) di atas tunjukkan bahawa

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{15^2} + \frac{1}{35^2} - \frac{1}{63^2} + \frac{1}{99^2} \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2 - 1)^2}\, .$$

(40 markah)

3. Di dalam soalan ini $i = \sqrt{-1}$.

(a) (i) Nilaikan

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right)^{21}.$$

(ii) Tunjukkan bahawa nombor kompleks $1 + \text{kos}\ \theta + i \sin \theta \neq 0$ dengan syarat $\theta \neq (2m + 1)\pi$ untuk sebarang integer m. Seterusnya tunjukkan bahawa

$$(1 + \text{kos}\ \theta + i \sin \theta)^n = \left(2\ \text{kos}\ \frac{\theta}{2}\right)^n \left(\text{kos}\ \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2}\right)$$

(20 markah)

(b) Dapatkan kesemua punca-punca persamaan

$$z^6 = -1.$$

(20 markah)

(c) Pertimbangkan transformasi $w = (1 + i)z + 2$. Dapatkan imej jalur-jalur berikut di bawah transformasi berkenaan.

(i) $|\,\text{Re}\,(z)\,| < 1$

(ii) $1 < \text{Im}\,(z) < 2$.

(30 markah)

(d) Katakan $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$. Tunjukkan bahawa u adalah harmonik. Cari fungsi konjugat harmonik yang memenuhi syarat $v(0, 0) = 1$. Apakah fungsi analisisnya?

(30 markah)

...5/-

4. Selesaikan persamaan Laplace di dalam koordinat kutub (r, θ)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

untuk $0 < r < 1$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ dengan syarat-syarat

$$u(r, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$u(1, \theta) = \theta.$$

(100 markah)

5. Jelmaan Laplace bagi f, yang ditandakan dengan $\mathcal{L}\{f(t)\}$ atau $F(s)$, ditakrifkan oleh persamaan

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \quad t \geq 0,$$

apabila kamiran tak wajar ini menumpu.

(a) Jika a ialah sebarang nombor nyata, tunjukkan bahawa

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a), \quad t \geq 0.$$

Dengan ini dapatkan $\mathcal{L}\{e^{5t} \sinh 3t\}$. Juga, dengan menggunakan

$$e^{at} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\},$$

dapatkan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + 8s + 21}\right\}$.

(40 markah)

(b) Jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ dan $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, nyatakan teorem konvolusi untuk menilaikan $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}$. Seterusnya nilaikan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s^2+9)}\right\}$.

(20 markah)

(c) Dengan menggunakan jelmaan Laplace selesaikan masalah nilai awal

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = \delta(t - 2\pi),$$

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0,$$

di mana δ ialah fungsi langkah unit.

(40 markah)

6. Diberi u(x, t) memenuhi persamaan

$$\kappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \ t < 0,$$

tertakluk kepada syarat sempadan

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

dan syarat awal

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Tunjukkan bahawa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(a_n \sin \frac{n\pi\kappa t}{L} + b_n \text{ kos } \frac{n\pi\kappa t}{L} \right),$$

dengan

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \ , \ n = 1, 2, \ldots$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi\kappa} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \ , \ n = 1, 2, \ldots$$

Dapatkan u(x, t) diberi L = 1, f(x) = 2x dan g(x) = 2 - x.

(100 markah)

JADUAL 1

f(t)	F(s) = $\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$, s > 0
t^n, n = integer positif	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, s > 0
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, s > a
kos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$, s > 0
sin at	$\frac{a}{s^2+a^2}$, s > 0
sinh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$, s > |a|
kosh at	$\frac{s}{s^2-a^2}$, s > |a|

oooooOooooo