

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1990/91

Mac/April 1991

JAM 242 Teori Kebarangkalian I

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab SEMUA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira elektronik boleh digunakan.

1. (a) Sebuah kotak mengandung 5 biji guli merah dan 7 biji guli hitam. Empat biji guli dikeluarkan tanpa penggantian dari kotak itu. Jika X dan Y masing-masing menandakan bilangan guli merah dan bilangan guli hitam yang dipilih, dapatkan $P(X \leq Y)$.

(30 markah)

- (b) Buktikan jika $P(\bar{A} | \bar{B}) = P(\bar{A})$, maka $P(A | B) = P(A)$.

(40 markah)

- (c) Sekeping duit siling dilambungkan sehingga "bunga" muncul buat kali pertama. Dapatkan kebarangkalian bahawa

(i) peristiwa itu berlaku pada lambungan ke-8.

(ii) bilangan lambungan yang diperlukan untuk mendapatkan peristiwa itu adalah sekurang-kurangnya 3.

(30 markah)

2. (a) Suatu pembolehubah rawak X mempunyai f.k.k.

$$f(x) = \begin{cases} c(1+x) & , -1 < x < 0 \\ c(1-x) & , 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \text{di tempat lain} \end{cases}$$

dapatkan

- (i) nilai pemalar c
(ii) $E(X)$ dan $V(X)$
(iii) fungsi taburan longgokan untuk X .

(40 markah)

...3/-

- (b) Katakan $X \sim B(n, 1/2)$ dan $Y = \frac{X}{n}$. Diberi $P(0.4 < Y < 0.6)$ adalah sekurang-kurangnya 0.90, tentukan nilai n dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshev.

(30 markah)

- (c) F.k.k tercantum bagi pembolehubah rawak diskret (X, Y) adalah

		Y	
		1	2
X	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

- (i) Cari f.k.k. bersyarat bagi X diberi $Y = i, i = 1, 2$.
 (ii) Adakah X dan Y tak bersandar?
 (iii) Cari nilai $P(XY \leq 3), P(X + Y > 2)$ dan $P(X | Y > 1)$

(30 markah)

3. (a) Jika $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
 tunjukkan fungsi penjana momen bagi X ialah $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$. Dengan ini, tunjukkan $E(X) = \text{Var}(X)$.

(40 markah)

- (b) X mempunyai f.k.k.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

tunjukkan bahawa $Y = X^2$ bertaburan khi-kuasa dua dengan 1 darjah kebebasan.

(30 markah)

...4/-

- (c) Katakan X dan Y adalah dua pembolehubah rawak tak bersandar dan masing-masing mempunyai fungsi penjana momen

$$M_X(t) = (0.2 + 0.8 e^t)^3$$
$$M_Y(t) = (0.3 + 0.7 e^t)^4$$

Nilaikan $P(X + Y = 3)$.

(30 markah)

4. (a) (X, Y) adalah suatu pembolehubah rawak yang mempunyai fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum (f.k.k.)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{40} & , 0 < x < 10 \\ & 10 - x < y < 14 - x \\ 0 & , \text{di tempat lain} \end{cases}$$

- (i) Lorekkan kawasan di mana $f(x, y) > 0$.
- (ii) Dapatkan f.k.k. sut bagi X dan nyatakan jenis taburannya.
- (iii) Dapatkan f.k.k. bersyarat untuk Y diberi $X = x$.
- (iv) Dapatkan f.k.k. sut bagi Y dan seterusnya cari nilai $E(Y)$.

(60 markah)

- (b) Andaikan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dan pertimbangkan transformasi $\ln Y = X \Leftrightarrow Y = e^X$. Cari

- (i) $E(Y)$ dan $\text{Var}(Y)$
- (ii) f.k.k. bagi Y .

(40 markah)

5. (a) Andaikan $X_1 \sim \Gamma(a, 1)$ dan $X_2 \sim \Gamma(b, 1)$ merupakan 2 pembolehubah rawak yang tak bersandar. Tunjukkan

$$Y_1 = X_1 + X_2 \text{ dan } Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$

adalah tak bersandar dan masing-masing bertaburan $\Gamma(a + b, 1)$ dan $\beta(a, b)$.

(50 markah)

- (b) X_1 dan X_2 merupakan dua pembolehubah rawak yang tak bersandar dengan taburan masing-masing $N(6, 1)$ dan $N(7, 1)$

(i) Dapatkan taburan bagi $X_1 - X_2$.

(ii) Cari $P(X_1 > X_2)$

(25 markah)

- (c) Jika X_1, X_2, \dots, X_n merupakan satu sampel rawak dari suatu populasi yang bertaburan Binomial (n, p), dapatkan fungsi penjana momen bagi

$$\sum_{i=1}^n X_i \text{ dan } \bar{X}.$$

(25 markah)

Lampiran

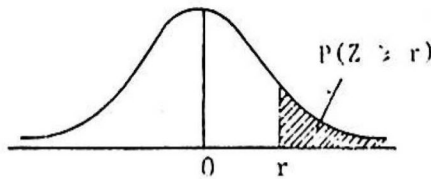
JADUAL III

LUAS DAFRAH DI HUJUNG TABURAN NORMAL PIAWAI

Nilai-nilai yang diadualkan di dalam jadual ini ialah kebarangkalian yang diberikan oleh

$$P(Z > r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_r^{\infty} e^{-z^2/2} dz,$$

di mana Z ialah pembolehubah rawak normal piawai yakni $Z \sim N(0, 1)$.



Lampiran

$\frac{(x - \mu)}{\sigma}$.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0515	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01619	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00674	.00657	.00639
2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00206	.00199	.00193
2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
3.0	.00135									
3.1	.00097									
3.2	.00069									
3.3	.00048									
3.4	.00034									
3.5	.00023									
3.6	.00016									
3.7	.00011									
3.8	.00007									
3.9	.00005									
4.0	.00003									

Taburan	Parameter	Fungsi Jisim Pelarangkalian	Pungsi Penjana Momen	Min	Varians
Bernoulli	p	$P_X(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \\ p, & x = 1 \end{cases}$	$pe^t + a$	p	pq
Binomial	n, p	$P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ x = 0, 1, 2, \dots, n. \end{cases}$	$(pe^t + a)^n$	np	npq
Hipergeometri	n, N, K	$P_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\ x = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases}$	-	$\frac{nK}{N}$	$\frac{nK(N-K)(N-1)}{N^2(N-1)}$
Geometri	p	$P_X(x) = \begin{cases} a^{x-1} p, \\ x = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$	$\frac{pe^t}{1 - ae^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{a}{p}$
Negatif Binomial	x, p	$P_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r a^{x-r} \\ x = r, r+1, r+2, \dots \end{cases}$	$\left(\frac{pe^t}{1 - ae^t}\right)^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{ra}{p}$
Poisson	λ	$P_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ x = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$	$e^{\lambda(e^t - 1)}$	λ	λ

Jadual 3.7

Modul 2

Taburan	Fungsi Ketumpatan Kebarangkalian	Parameter	Min	Varians	Fungsi Penjana Momen
Seragam	$\frac{1}{b-a}, a < x < b$	$-\infty < a < b < \infty$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{bt - e^{at}}{(b-a)t}$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ bagi $-\infty < x < \infty$	$-\infty < \mu < \infty$ $\sigma > 0$	μ	σ^2	$e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}$
Eksponen	$\lambda e^{-\lambda x}, x > 0$	$\lambda > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda$
Gamma	$\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}, x > 0$	$\lambda > 0$ $n > 0$	n/λ	n/λ^2	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n, t < \lambda$
Khi Kuasa Dua	$\frac{1}{2^{v/2} \Gamma(v/2)} x^{v/2 - 1} e^{-x/2}$	$v = 1, 2, 3, \dots$	v	$2v$	$\left(\frac{1}{1 - 2t}\right)^{v/2}, t < 1/2$
Beta	$\frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ bagi $0 < x < 1$	$a > 0$ $b > 0$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$	tidak berguna

Rajah 4.19

