UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1990/91

Mac/April 1991

JAM 241 Persamaan Pembezaan/Ruang Vektor

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

- Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
- Jawab mana-mana LIMA soalan. Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan itu.
- Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.
- Alat pengira elektronik boleh digunakan.

---

1. (a) Terangkan dengan jelas sama ada penyelesaian siri kuasa di sekitar $x = a$, untuk nilai-nilai a yang diberi, wujud bagi persamaan pembezaan

$$(x^2 + x)y'' + (x - 2)y = 0$$

dan apakah selang penumpuan bagi siri kuasa tersebut.

(i) $a = 0$

(ii) $a = 1$.

(30 markah)

(b) Persamaan Bessel berperingkat sifar diberi oleh

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

Tunjukkan bahawa

(i) $x = 0$ adalah titik singular sekata;

(ii) punca persamaan indeks ialah $r_1 = r_2 = 0$;

(iii) satu penyelesaian untuk $x = 0$ ialah

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} .$$

(70 markah)

2. Fungsi Bessel $J_n(x)$ ditakrifkan oleh

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

dengan n ialah integer bukan negatif.

Tunjukkan

$$x J_n'(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x)$$

atau

$$x J_n'(x) = -n J_n(x) + x J_{n-1}(x).$$

Deduksikan bahawa

$$\frac{d}{dx}\{x J_1(x)\} = x J_0(x),$$

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

Jika $I_m = \int_0^1 x^{2m+1} J_0(\alpha x)\,dx$ dengan m ialah suatu integer dan α ialah punca bagi $J_0(\alpha) = 0$, tunjukkan bahawa

$$\alpha^2 I_m = \alpha J_1(\alpha) - 4m^2 I_{m-1}.$$

Seterusnya, nilaikan

$$\int_0^1 x^3 J_0(\alpha x)\,dx.$$

(100 markah)

3. (a) Jika $\Psi(t)$ adalah matriks penyelesaian asasi bagi sistem persamaan pembezaan $\frac{dX}{dt} = AX$, tunjukkan bahawa

$$e^{At} = \Psi(t)\,\Psi^{-1}(0).$$

(25 markah)

(b) Cari matriks asasi e^{At} untuk sistem

$$\frac{dX}{dt} = AX \text{ apabila } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(75 markah)

4. (a) Suatu set V yang mengandungi vektor-vektor di mana dua operasi, penambahan vektor $\oplus$ dan pendaraban skalar $\odot$ ditakrifkan, dipanggil ruang vektor jika ianya mempunyai sifat-sifat tertentu. Berikan sifat-sifat tersebut

(20 markah)

...5/-

(b) Katakan set $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

dan menepati operasi penambahan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

dan operasi pendarabaan skalar

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha y \\ z \end{pmatrix}$$

Tentukan sama ada V suatu ruang vektor atau tidak dengan menyemak kesemua aksiom. Jika tidak, nyatakan semua aksiom yang tidak ditepati.

(60 markah)

(c) Katakan V ialah ruang vektor dan $M = \{\underline{O}\} \subset V$. Buktikan bahawa M ialah subruang bagi ruang vektor V.

(20 markah)

5. (a) Katakan $\{v_1, v_2, v_3\}$ adalah set vektor yang bersandar linear dari ruang vektor V. Jika $v_4 \in V$, tunjukkan bahawa set $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ juga set bersandar linear.

(20 markah)

(b) Suatu subruang S dari $\mathbf{R}^4$ diberi oleh set

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \; x = y \;\; \text{dan} \;\; z = w \right\}.$$

Cari asas bagi S. Apakah dimensi bagi S?

(40 markah)

(c) Berikan takrif set menentang. Tentukan sama ada set

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

merentang M_{2x3}.

(40 markah)

6. (a) (i) Apakah yang dimaksudkan dengan pernyataan bahawa vektor V adalah vektor eigen bagi matriks A?

(ii) Jika λ ialah nilai eigen bagi matriks A yang tak singular, buktikan bahawa λ^{-1} ialah nilai eigen bagi A^{-1}.

(40 markah)

(b) Tentukan sama ada matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

berpenjuru atau tidak.

Jika berpenjuru, cari matriks P yang tak singular supaya $P^{-1}AP$ adalah pepenjuru.

(60 markah)

oooooOooooo